



# Zákony zkreslení

Matematická kartografie

# Osnova

1. Pojem zkreslení
2. Délkové zkreslení
3. Úhlové zkreslení
4. Plošné zkreslení
5. Zákony zkreslení při použití polárních souřadnic
6. Vizualizace zkreslení



**1**

# **POJEM ZKRESLENÍ**

# Pojem zkreslení

Terminologický slovník zeměměřictví a katastru nemovitostí:

Kartografické zkreslení:

- odchylka úhlů, délek a ploch na mapě od skutečnosti na zemském povrchu, způsobená jejich zobrazením na referenční ploše

# Pojem zkreslení

- rovinný obraz referenční plochy je vždy zkreslen
  - obecně jsou deformovány jak vzájemné polohy bodů, tak tvary (křivosti) čar
  - zkreslení (distortion) roste se zvětšujícím se rozsahem zobrazovaného území, pokud je zobrazováno do roviny jako celek
  - některé charakteristiky zkreslení jsou společné pro celou skupinu zobrazení
  - při odvozování jednotlivých zobrazení se uvažují požadavky na průběh zkreslení rovinného obrazu
- 
- základní odvození vždy pro pólovou polohu z referenčního elipsoidu
  - případ při použití koule se odvodí následně
  - v případě jiné než pólové polohy se dosazují kartografické souřadnice



# 2

## DÉLKOVÉ ZKRESLENÍ



# Délkové zkreslení

- základní posuzované zkreslení – z něj se odvozují ostatní
- délkové zkreslení souvisí s měřítkem zobrazeného území na mapě
- Co je měřítko mapy?

Poměr délky na mapě a ve skutečnosti.

- je uváděno jako konstantní pro celou mapu
- jedná se však pouze o hlavní měřítko, které je vztaženo k určité poloze nebo k určitým směrům

Přesněji (Terminologický slovník):

- poměr zmenšení nezkreslené délky v mapě k odpovídající délce ve skutečnosti;
- označuje se výrazem  $1 : M$ , kde  $M$  je měřítkové číslo.





# Délkové zkreslení

- skutečné měřítko v určitém místě závisí na délkovém zkreslení  $m$
- hodnota  $m$  se většinou blíží k 1
- $m > 1$  - zobrazení prodlužuje délky
- $m < 1$  - zobrazení zkracuje délky

„Ekvidistantní zobrazení nezkracuje délky.“ Souhlas?  
Každé zobrazení zkresluje aspoň nějaké délky.

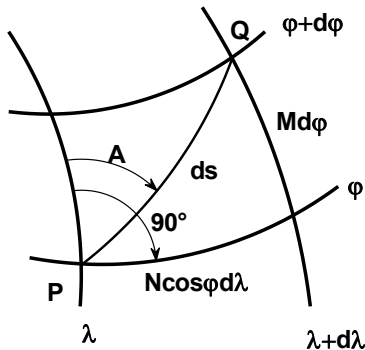
Délkové zkreslení je poměr nekonečně malé délky v obraze a originále.

Proto se při odvození používá element mezi „diferenciálně blízkými body  $P$  a  $Q$ “.

# Délkové zkreslení

- délkový element v zobrazovací rovině / délkový element na referenční ploše
- zeměpisný (geodetický) azimut elementu je  $A$  (na ploše) nebo  $A'$  (v rovině)

$$m = \frac{dS}{ds}$$



$$\sin(90^\circ - A) = \frac{M d\varphi}{ds}$$

$$d\varphi = \frac{\cos A}{M} ds$$

$$\cos(90^\circ - A) = \frac{N \cos \varphi d\lambda}{ds}$$

$$d\lambda = \frac{\sin A}{N \cos \varphi} ds$$

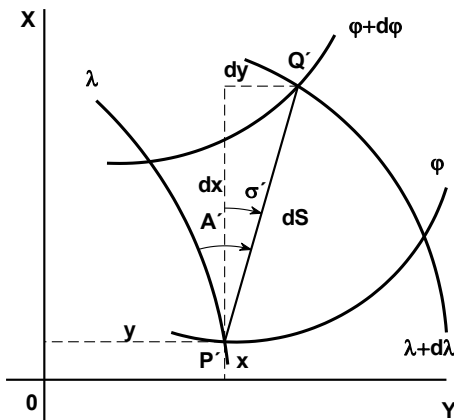
$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

poledník:  $A = 0^\circ$  nebo  $180^\circ$

$$ds_p = M d\varphi$$

rovnoběžka:  $A = 90^\circ$  nebo  $270^\circ$

$$ds_r = N \cos \varphi d\lambda$$



$$dS^2 = dx^2 + dy^2$$

# Délkové zkreslení

$$dS^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\begin{aligned} x &= f(\varphi, \lambda) \\ y &= f(\varphi, \lambda) \end{aligned} \quad dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \quad \begin{array}{l} \text{totální diferenciály z obecných} \\ \text{zobrazovacích rovnic} \end{array}$$

$$dS^2 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] d\varphi^2 + \left( \frac{\partial x \partial x}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial y \partial y}{\partial \varphi \partial \lambda} \right) 2d\varphi d\lambda + \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] d\lambda^2$$

součty kvadrátů a součinů parciálních derivací = Gaussovy symboly

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \quad F = \frac{\partial x \partial x}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial y \partial y}{\partial \varphi \partial \lambda} \quad G = \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$dS^2 = Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2$$

dosazení do původního vzorce:

$$m = \frac{dS}{ds} \quad ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

$$m^2 = \frac{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}$$

# Délkové zkreslení

$$m^2 = \frac{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}$$

dosadíme

vztahy z obrázku a goniometrické funkce

$$\sin(90^\circ - A) = \frac{Md\varphi}{ds}$$

$$2 \sin A \cos A = \sin 2A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \frac{N \cos \varphi d\lambda}{ds}$$

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

$$m^2 = \frac{E}{M^2} \cos^2 A + \frac{F}{MN \cos \varphi} \sin 2A + \frac{G}{N^2 \cos^2 \varphi} \sin^2 A$$

poledník:  $A = 0^\circ$  nebo  $180^\circ$

$$m_p = \frac{\sqrt{E}}{M}$$

$$ds_p = Md\varphi$$

rovnoběžka:  $A = 90^\circ$  nebo  $270^\circ$

$$m_r = \frac{\sqrt{G}}{N \cos \varphi}$$

$$ds_r = N \cos \varphi d\lambda$$

$$m^2 = m_p^2 \cos^2 A + \frac{F}{MN \cos \varphi} \sin 2A + m_r^2 \sin^2 A$$

Délkové zkreslení je tedy závislé na poloze bodu  $(\varphi, \lambda)$  a azimutu  $A$  (směru).

# Délkové zkreslení na referenční kouli

poznění se Gaussovy symboly:

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial U} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial U} \right)^2 \quad F = \frac{\partial x \partial x}{\partial U \partial V} + \frac{\partial y \partial y}{\partial U \partial V} \quad G = \left( \frac{\partial x}{\partial V} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial V} \right)^2$$

zkreslení v polednicích:

$$m_p = \frac{\sqrt{E}}{R}$$

zkreslení v rovnoběžkách:

$$m_r = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi}$$

zkreslení v obecném azimutu:

$$m^2 = m_p^2 \cos^2 A + \frac{F}{R^2 \cos \varphi} \sin 2A + m_r^2 \sin^2 A$$



# Extrémní délkové zkreslení

Hledání extrému funkce: derivace funkce a položení rovno 0.

$$\frac{dm^2}{dA} = 2m \frac{dm}{dA} = -m_p^2 2 \sin A_a \cos A_a + \frac{F}{MN \cos \varphi} 2 \cos 2A_a + m_r^2 2 \sin A_a \cos A_a = 0$$

$$\operatorname{tg} 2A_a = \frac{2F}{(m_p^2 - m_r^2) MN \cos \varphi}$$

funkce tg je dvojnásobná – vztah platí pro 2 azimuty:

$A_a$

$A_b = 90^\circ - A_a$

Extrémní délková zkreslení  $m_a$  a  $m_b$  ve dvou vzájemně kolmých směrech – **hlavní paprsky zkreslení**:

$$m_a^2 = m_p^2 \cos^2 A_a + \frac{F}{MN \cos \varphi} \sin 2A_a + m_r^2 \sin^2 A_a$$

$$m_b^2 = m_p^2 \cos^2 A_b + \frac{F}{MN \cos \varphi} \sin 2A_b + m_r^2 \sin^2 A_b$$

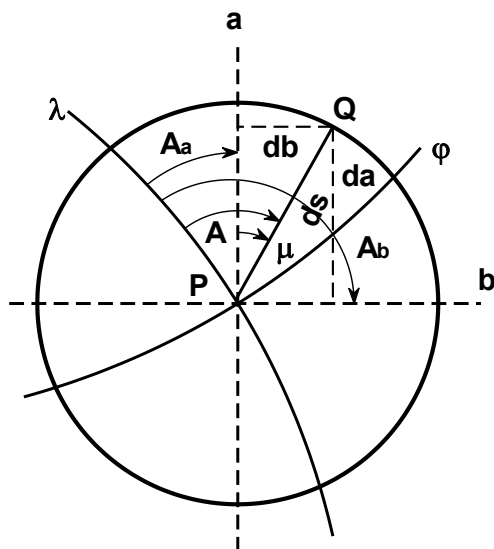
příp.

$$m_b^2 = m_p^2 \sin^2 A_a + \frac{F}{MN \cos \varphi} \sin 2A_a + m_r^2 \cos^2 A_a$$

# Extrémní délkové zkreslení

Hlavní paprsky zkreslení = směry extrémů, zůstávají na sebe ve všech zobrazeních kolmé i po zobrazení do roviny.

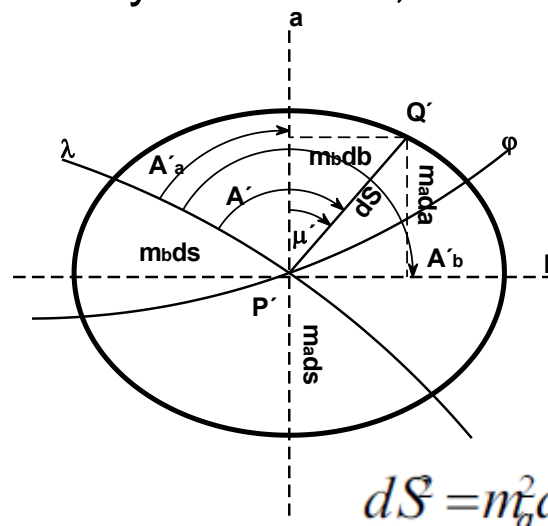
kružnice o poloměru  $ds$



$$da = ds \cos \mu$$

$$db = ds \sin \mu$$

elipsa zkreslení = Tissotova indikatrix  
 poloosy  $a = m_a ds$ ,  $b = m_b ds$



$$dS = m_a^2 da + m_b^2 db$$

Další vzorec pro výpočet délkového zkreslení:

$$m^2 = m_a^2 \cos^2 \mu + m_b^2 \sin^2 \mu$$

$$\mu = A - A_a$$

„mí“ - směrník uvažovaný od hlavního paprsku zkreslení

# Extrémní délkové zkreslení na referenční kouli

Extrémní délkové zkreslení ve dvou vzájemně kolmých směrech:

$$\operatorname{tg} 2A_a = \frac{2F}{(m_p^2 - m_r^2) R^2 \cos^2 A_a}$$

$$m_a^2 = m_p^2 \cos^2 A_a + \frac{F}{R^2 \cos^2 A_a} \sin 2A_a + m_r^2 \sin^2 A_a$$

$$m_b^2 = m_p^2 \sin^2 A_a + \frac{F}{R^2 \cos^2 A_a} \sin 2A_a + m_r^2 \cos^2 A_a$$

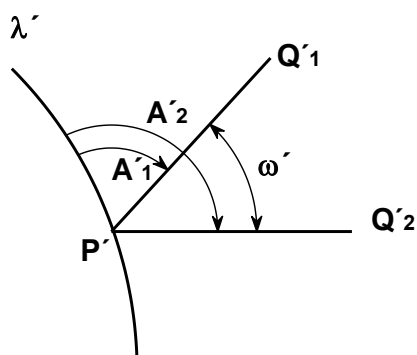
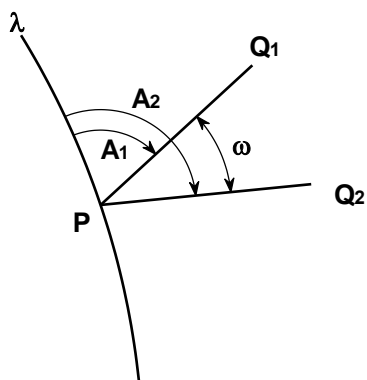


# 3

## ÚHLOVÉ ZKRESLENÍ

# Úhlové zkreslení

**Úhlové zkreslení**  $\Delta\omega$  = rozdíl velikosti úhlu v rovině (na zobrazovací ploše) a velikosti odpovídajícího úhlu na referenční ploše.

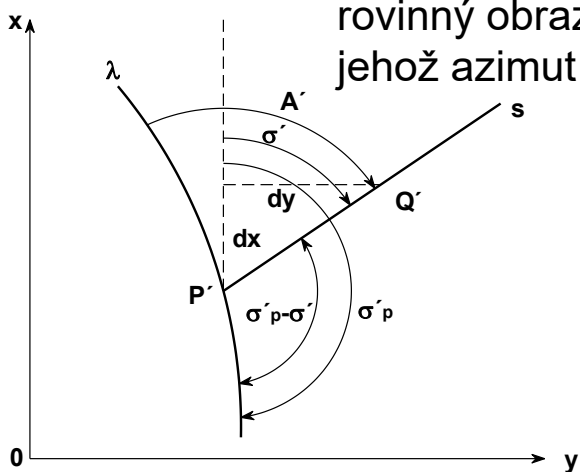


$$\Delta\omega = \omega' - \omega \quad \text{zkreslení úhlu}$$

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= (A'_2 - A'_1) - (A_2 - A_1) \\ &= (A'_2 - A_2) - (A'_1 - A_1) \\ &= \Delta A_2 - \Delta A_1 \end{aligned}$$

$$\Delta A = A' - A \quad \text{zkreslení azimutu}$$

rovinný obraz zeměpisného poledníku  $\lambda$  a libovolného směru  $s$ , jehož azimut v zobrazovací rovině je  $A'$  a směrník je  $\sigma'$



$$A' = 180^\circ - (\sigma'_{p'} - \sigma')$$

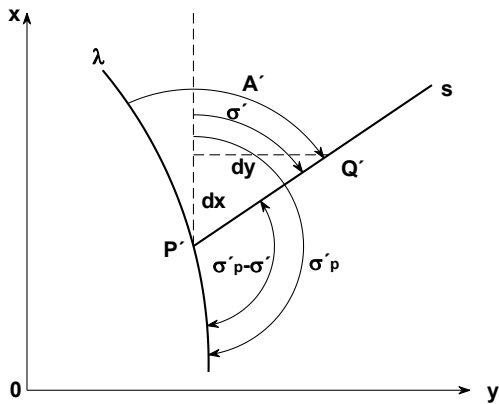
$$\text{tg} A' = -\text{tg}(\sigma'_{p'} - \sigma')$$

$$\text{tg} A' = \frac{\text{tg} \sigma' - \text{tg} \sigma'_{p'}}{1 + \text{tg} \sigma'_{p'} \text{tg} \sigma'}$$

Pro určení azimutu je tedy nutné stanovit tangenty směrníků. 18



# Úhlové zkreslení



$$tg \sigma' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}$$

$$tg \sigma' = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \cos A}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cos A} ds + \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda} \sin A}{\frac{\partial x}{\partial \lambda} \sin A} ds = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} N \cos \varphi \cos A + \frac{\partial y}{\partial \lambda} M \sin A}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} N \cos \varphi \cos A + \frac{\partial x}{\partial \lambda} M \sin A}$$

Dosadí se Gaussovy koeficienty:

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$tg \sigma_p' = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}} \quad tg A' = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \frac{M}{N} \cos \varphi \cot gA + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}$$

$$F = \frac{\partial x \partial x}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial y \partial y}{\partial \varphi \partial \lambda}$$

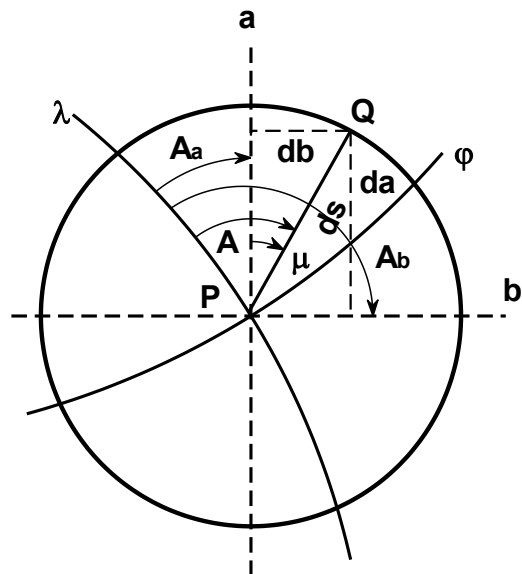
$$tg A' = \frac{H}{E \frac{M}{N} \cos \varphi \cot gA + F}$$

$$H = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

známe A', známe A, vypočítáme úhlové zkreslení  $\omega$

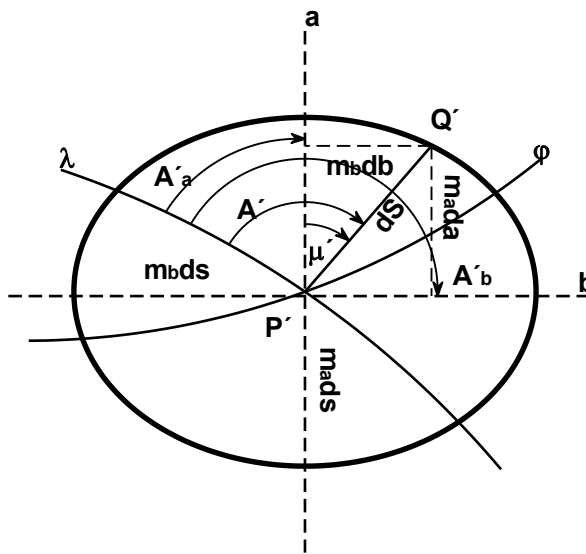
# Úhlové zkreslení

Zkreslení azimutu je možné vypočítat i z extrémních hodnot délkového zkreslení.  
Konformní zobrazení – kružnice zůstane kružnicí.



$$\operatorname{tg} \mu = \frac{db}{da}$$

$$\operatorname{tg} \mu' = \frac{m_b}{m_a} \operatorname{tg} \mu$$



$$\operatorname{tg} \mu' = \frac{m_b db}{m_a da}$$

zkreslení směrníku:  $\Delta \mu = \mu' - \mu$

zkreslení azimutu:  $\Delta A = A' - A = \Delta \mu + A'_a - A_a$  Úhlové zkreslení je tedy funkcí azimutu.

známe  $A'$ , známe  $A$ , vypočítáme úhlové zkreslení  $\omega$

# Úhlové zkreslení na kouli

Tvar Gaussova symbolu:

$$H = \frac{\partial x}{\partial U} \frac{\partial y}{\partial V} - \frac{\partial x}{\partial V} \frac{\partial y}{\partial U}$$

Výpočet azimutu ve  
zobrazovací rovině:

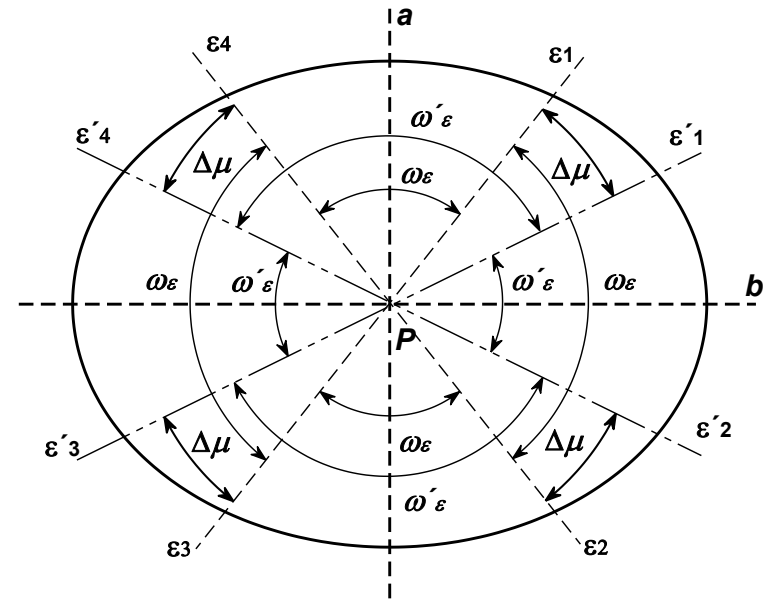
$$\operatorname{tg} A = \frac{H}{E \cos J \operatorname{cog} A + F}$$

# Extrémní úhlové zkreslení

- v elipse zkreslení existují symetrické směry, ve kterých **úhlové zkreslení dosahuje extrému**
- označují se symbolem  $\varepsilon$
- jejich směrníky v ortogonální soustavě hlavních paprsků zkreslení budou  $\mu_\varepsilon$  a  $\mu'_\varepsilon$  a jim odpovídající azimuty  $A_\varepsilon$  a  $A'_\varepsilon$

velikost extrémního zkreslení azimutu –  
 $\Delta A = A'_\varepsilon - A_\varepsilon$

velikost extrémního zkreslení směrníku –  
 $\Delta \mu_\varepsilon = \mu'_\varepsilon - \mu_\varepsilon$



$$\sin \Delta \mu_\varepsilon = \frac{m_b - m_a}{m_b + m_a}$$

$$\sin \frac{\Delta \omega_\varepsilon}{2} = \frac{m_b - m_a}{m_b + m_a}$$

Extrémní úhlové zkreslení na kouli?

Vzorec se nemění, mění se jen dosazená extrémní délková zkreslení.



# 4

## PLOŠNÉ ZKRESLENÍ



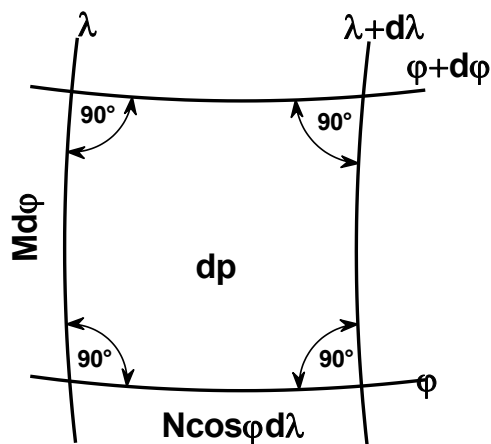
# Plošné zkreslení

## základní vztah:

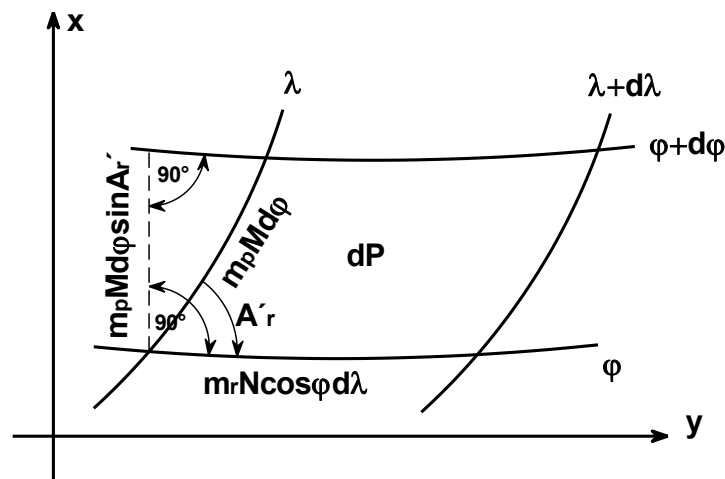
$dp$  - diferenciální (= nekonečně malá) plocha na referenční ploše

$dP$  - odpovídající diferenciální plocha v zobrazovací rovině

$$m_{pl} = \frac{dP}{dp}$$



$$dp = MN \cos \varphi d\varphi d\lambda$$



vzorec plochy kosodélníku:

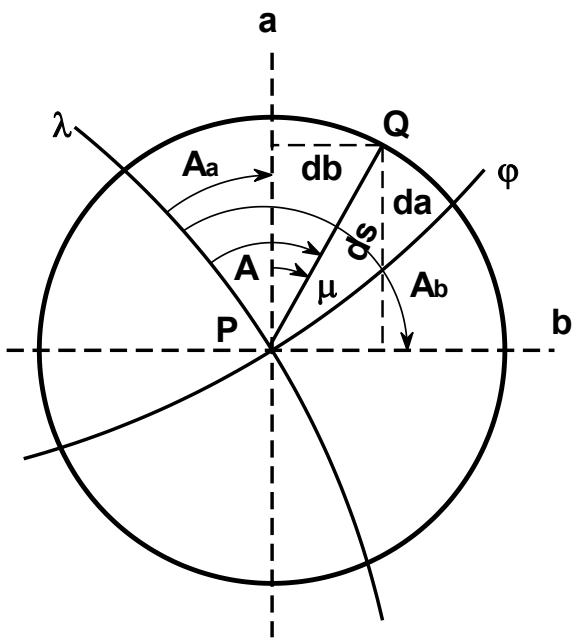
$$dP = m_p m_r MN \cos \varphi d\varphi d\lambda \sin A_r'$$

$$m_{pl} = m_p m_r \sin A_r'$$

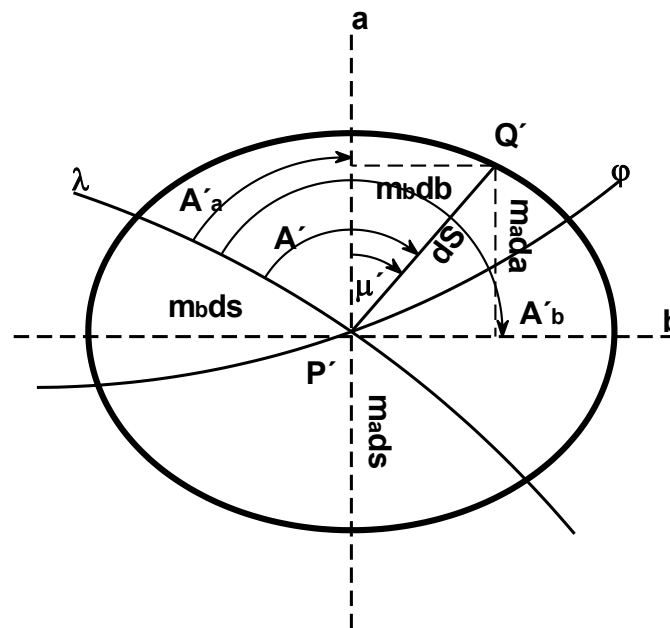
# Plošné zkreslení

využití elipsy zkreslení:

$$m_{pl} = \frac{dP}{dp}$$



$$dp = \pi ds^2$$



$$dP = \pi m_a ds m_b ds$$

$$m_{pl} = m_a m_b$$

# 5

## ZÁKONY ZKRESLENÍ PŘI POUŽITÍ POLÁRNÍCH SOUŘADNIC

# Zákony zkreslení při použití polárních souřadnic

Doposud vše na základě rovnic:  $x = f(\varphi, \lambda)$   
 $y = f(\varphi, \lambda)$

V případě zobrazení kuželového nebo azimutálního:  $\rho = f(\varphi, \lambda)$      $x = x_v - \rho \cos \varepsilon$   
 $\varepsilon = f(\varphi, \lambda)$      $y = \rho \sin \varepsilon$

$x \rightarrow x_v \rightarrow \varphi$      $y \rightarrow \rho \rightarrow \varphi$   
 $\rightarrow \rho \rightarrow \varphi$      $\rightarrow \lambda$   
 $\rightarrow \lambda$      $\rightarrow \varepsilon \rightarrow \varphi$   
 $\rightarrow \varepsilon \rightarrow \varphi$      $\rightarrow \lambda$   
 $\rightarrow \lambda$

Změní se Gaussovy symboly, jinak zůstanou vzorce zkreslení stejné.

$$E = \left( \frac{\partial x_v}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \rho \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} - \cos \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial x_v}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$F = \left( \rho \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} - \cos \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial x_v}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda}$$

$$H = \left( \sin \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \rho \cos \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial x_v}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right) \rho$$

$$G = \left( \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right)^2$$

# Zákony zkreslení při použití polárních souřadnic na kouli

Změní se Gaussovy symboly, jinak zůstanou vzorce zkreslení stejné.

$$E = \left( \frac{\partial x_i}{\partial U} \right)^2 + \left( \rho \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} - \cos \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial U} \right)^2 \frac{\partial x_i}{\partial U} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial U} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \right)^2$$

$$F = \left( \rho \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} - \cos \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial V} \right) \frac{\partial x_i}{\partial U} + \frac{\partial \rho}{\partial U} \frac{\partial \rho}{\partial V} + \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \frac{\partial \varepsilon}{\partial V}$$

$$G = \left( \frac{\partial \rho}{\partial V} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)^2$$

$$H = \left( \sin \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial V} + \rho \cos \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right) \frac{\partial x_i}{\partial U} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial V} \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} - \frac{\partial \rho}{\partial U} \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right) \rho$$





# 6

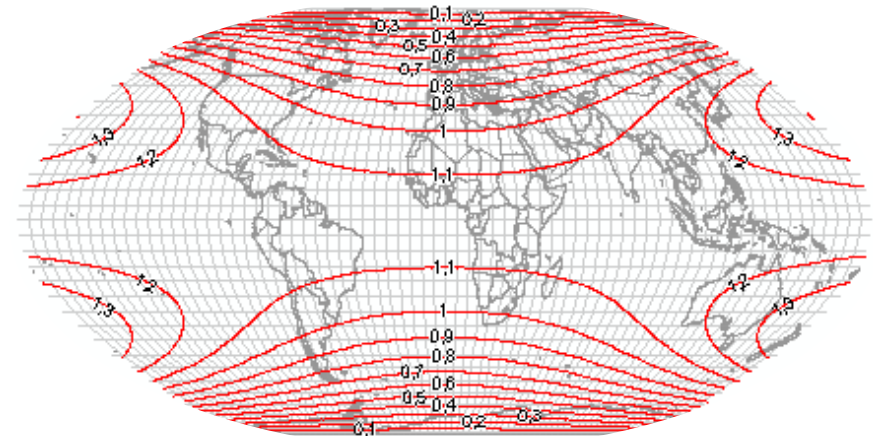
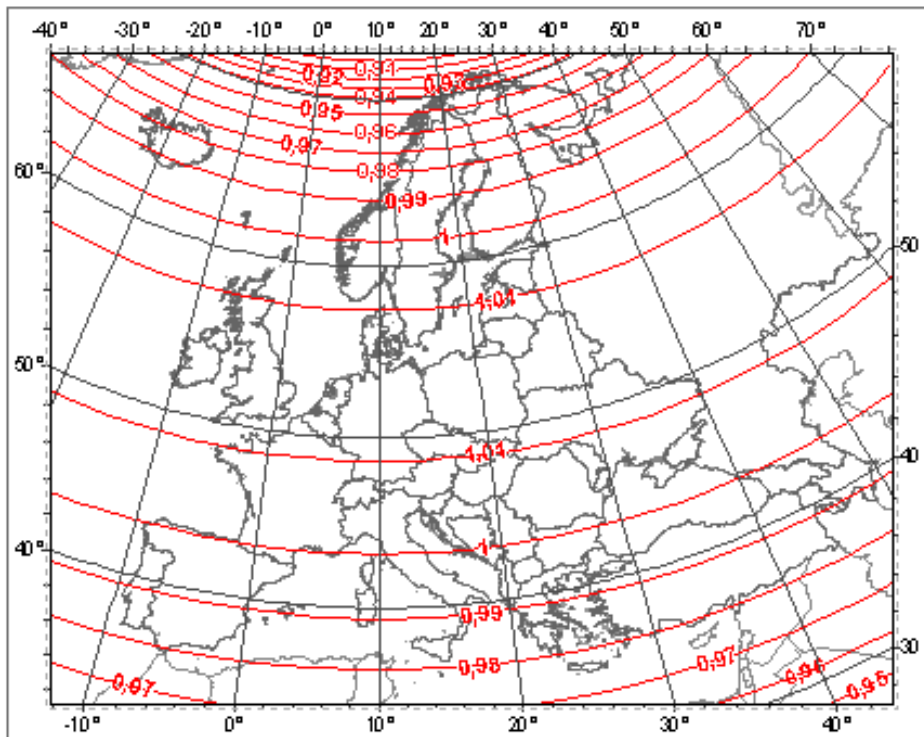
## VIZUALIZACE ZKRESLENÍ

# Vizualizace zkreslení

- charakter průběhu zkreslení je možné vizualizovat pomocí čar stejných hodnot zkreslení, tzv. ekvideformát
- ekvideformáty mohou být konstruovány pro průběh všech druhů zkreslení
- vzhledem ke skutečnosti, že plošné a úhlové zkreslení je možné vyjádřit i pomocí délkového zkreslení  $m$ , jsou nejčastěji zobrazovány ekvideformáty délkových zkreslení

# Vizualizace zkreslení

- Zkreslení se nejvíce mění v kolmém směru na směr **ekvideformát**.
- U jednoduchých zobrazení jsou ekvideformáty totožné s obrazem rovnoběžek - zeměpisných nebo kartografických.
- U nepravých a obecných zobrazení je tvar ekvideformát složitější.



# Vizualizace zkreslení

- vyjádření zkreslení číslem - poměrovou formou

poměrová forma  
délkového zkreslení:

$$v_m = m - 1$$

$$v_m = \frac{dS - ds}{ds}$$

Při  $m = 1$  by tedy bylo  $v_m = 0$ .  
Zkreslení není.

poměrová forma  
plošného zkreslení:

$$v_{pl} \% = (m_{pl} - 1)100 \%$$

Při  $m_{pl} = 1$  není zkreslení.  
 $v = 0\%$



# Vizualizace zkreslení

## elipsy zkreslení (Tissotovy indikatrix)

- zobrazené v uzlových bodech zeměpisné sítě:

Lze zjistit:

- délkové zkreslení,
- orientace hlavních paprsků zkreslení vůči obrazu poledníků a rovnoběžek,
- plošné zkreslení.

