Teorie zobrazení

Matematická kartografie

Osnova

1. Východiska
2. Ekvidistantní zobrazení
3. Ekvivalentní zobrazení
4. Konformní zobrazení

1

VÝCHODISKA

Východiska

- minule – zákony zkreslení
- možnost matematicky definovat zobrazení – stanovení počátečních podmínek
- odvození jednotlivých typů zobrazení:
  - ekvidistantní
  - ekvivalentní
  - konformní
- základní odvození vždy pro pólovou polohu z referenčního elipsoidu
- případ při použití koule se odvodí následně
- v případě jiné než pólové polohy se dosazují kartografické souřadnice

2

EKVIDISTANTNÍ ZOBRAZENÍ

Ekvidistantní zobrazení

- požadavek **nezkreslení délek nějaké soustavy čar**
- matematicky vyjádřeno pomocí:
  - **základních vzorců pro délkové zkreslení**
  - **Gaussových symbolů**

- základ – **délkové zkreslení** $m = \frac{dS}{ds}$

- ekvidistantní zobrazení v polednících $m_p = 1$

$$ds_p = M d\varphi \qquad \frac{dS_p}{M d\varphi} = 1 \qquad \frac{dS_p}{R dU} = 1$$

$$m_p = \frac{\sqrt{E}}{M} \qquad \frac{\sqrt{E}}{M} = 1 \Rightarrow E = M^2 \qquad \frac{\sqrt{E}}{R} = 1 \Rightarrow E = R^2$$

Ekvidistantní zobrazení

- ekvidistantní zobrazení v rovnoběžkách $m_r = 1$

$$ds_r = N\cos\varphi d\lambda \qquad \frac{dS_r}{N\cos\varphi d\lambda} = 1 \qquad \frac{dS_r}{R\cos U dV} = 1$$

$$m_r = \frac{\sqrt{G}}{N\cos\varphi} \qquad \frac{\sqrt{G}}{N\cos\varphi} = 1 \Rightarrow G = N^2\cos^2\varphi \qquad \frac{\sqrt{G}}{R\cos U} = 1 \Rightarrow G = R^2\cos^2 U$$

- ekvidistantnost v jiných soustavách čar
    - šikmá poloha
    - kartografické souřadnice Š a D

3

EKVIVALENTNÍ ZOBRAZENÍ

Ekvivalentní zobrazení

- nezkreslené nebo konstantně zkreslené plochy

$$\boxed{m_{pl} = 1}$$

$$m_p m_r \sin A'_r = 1$$

- jednoduchá zobrazení
  - obecný vzorec je zjednodušený pro $A'_r = 90°$

$$\boxed{m_p m_r = 1}$$

- nepravá a obecná zobrazení
  - zpravidla Gaussovy symboly

$$\frac{H}{MN\cos\varphi} = 1 \Rightarrow H = MN\cos\varphi$$

$$\frac{H}{R^2\cos U} = 1 \Rightarrow H = R^2\cos U$$

4

KONFORMNÍ ZOBRAZENÍ

Konformní zobrazení

- **Nezkreslují se úhly** – přesněji v diferenciálním okolí.

$$\Delta\omega = 0$$

$$\sin\frac{\Delta\omega_\varepsilon}{2} = \frac{m_b - m_a}{m_b + m_a}$$

z toho plyne: $m_a = m_b$

- Kružnice zůstane kružnicí – nezkreslí se na elipsu.

z toho také plyne: $m_a = m_b$

Konformní zobrazení

- Extrémní hodnoty délkového zkreslení jsou tedy stejné.
- To je možné, když délkové zkreslení je:
  - konstantní
  - nezávislé na směru azimutu délkového elementu

$$m^2 = m_p^2 \cos^2 A + \frac{F}{MN\cos\varphi} \sin 2A + m_r^2 \sin^2 A$$

- Platí tedy:
  - $m_p = m_r$
  - $F = 0$

$$m_p = m_r$$

Konformní zobrazení

$$m_p = m_r$$

- podmínku lze vyjádřit i pomocí Gaussových koeficientů
- definice zobrazení pomocí Gaussových koeficientů a zeměpisných souřadnic
  - na elipsoidu
  - na kouli

$$\frac{\sqrt{E}}{M} = \frac{\sqrt{G}}{N\cos\varphi} \Rightarrow \frac{E}{G} = \frac{M^2}{N^2\cos^2\varphi}$$

$$\frac{\sqrt{E}}{R} = \frac{\sqrt{G}}{R\cos U} \Rightarrow \frac{E}{G} = \frac{1}{\cos^2 U}$$

Konformní zobrazení

- Konformní zobrazení je definováno pomocí izometrických souřadnic.
  - q = izometrická šířka na elipsoidu
  - Q = izometrická šířka na kouli

- Obecné zobrazovací rovnice konformního zobrazení pomocí izometrických souřadnic:

$$x + iy = f\left(q + i\lambda\right) \qquad x - iy = f\left(q - i\lambda\right)$$

Konformní zobrazení geodetické čáry

- Geodézie – měření pomocí trigonometrických sítí.

- Strany trojúhelníků trigonometrických sítí jsou geodetickými čarami:
  - Koule – části hlavních kružnic
  - Referenční elipsoid – části geodetických čar

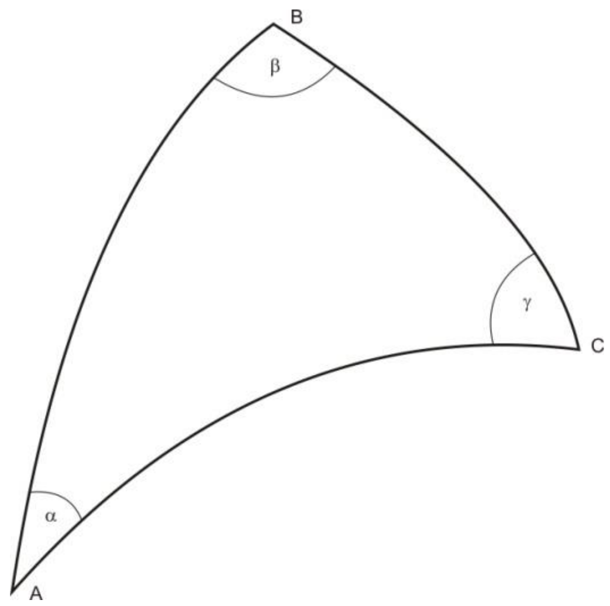
- Většina úloh praktické geodézie je řešena v rovině konformního zobrazení.
  - Úhly se měří nejpřesněji.

Konformní zobrazení geodetické čáry

Konformní zobrazení nezkresluje úhly?

Ne tak úplně!

- Převod trojúhelníku z koule do roviny.
- Z více než 180° bude jen 180° – dojde ke zkreslení úhlů!

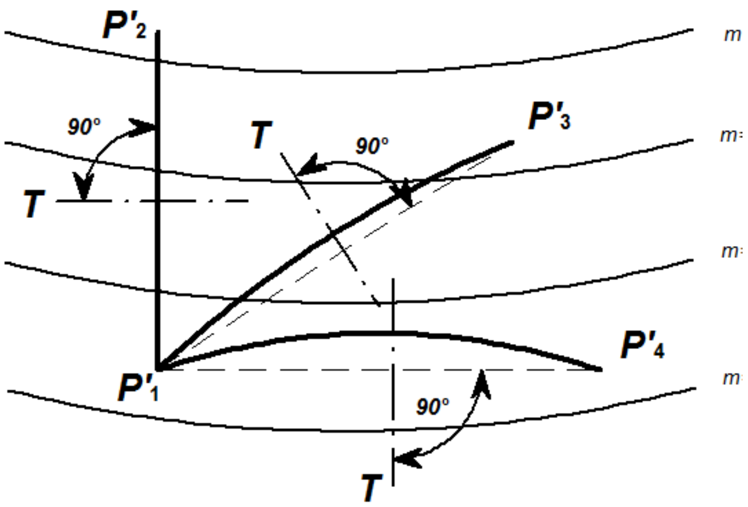


Proč se tedy tolik používá?

- To platí i v případě ekvidistantního nebo ekvivalentního zobrazení.
- Tam by ale navíc došlo i ke zkreslení délky kvůli zobrazení.
- Proto se v geodézii používá konformní zobrazení, aby se řešilo méně korekcí.

Průběh obrazu geodetické čáry v rovině konformního zobrazení

- Pro výpočty v geodetické praxi je nutné znát:
  - tvar geodetické čáry – především na jejím počátečním a koncovém bodě
  - délku jejího obrazu.
- Tyto vlastnosti lze určit pomocí výpočtů tzv. směrové a délkové korekce geodetické čáry.
- Viz skripta.



Průběh obrazu geodetické čáry v rovině konformního zobrazení

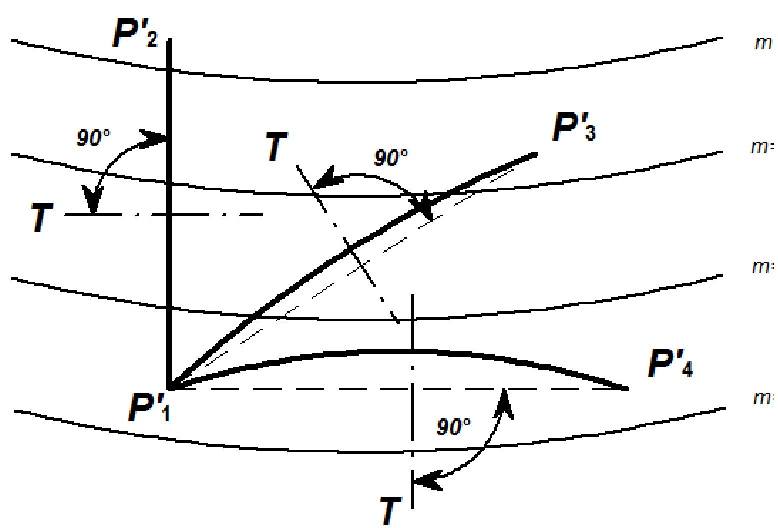
křivost $$\Gamma = \frac{1}{m}\frac{dm}{dT}$$

- m - délkové zkreslení
- dm/dT - změna zkreslení ve směru kolmém ke geodetické čáře

- geodetická čára vedena kolmo k ekvideformátám:
  - směr kolmý na geod. čáru je rovnoběžný s ekvideformátami
  - dm/dT = 0
  - obraz bude přímka

- geodetická čára ve směru ekvideformát
  - směr kolmý na geod. čáru je kolmý na ekvideformáty
  - dm/dT = max
  - křivost čáry bude maximální

jednoduchá zobrazení – ekvideformáty totožné s rovnoběžkami



Průběh obrazu geodetické čáry v rovině konformního zobrazení

geodetické čáry na Google Maps