Jednoduchá kuželová zobrazení

Matematická kartografie

Osnova

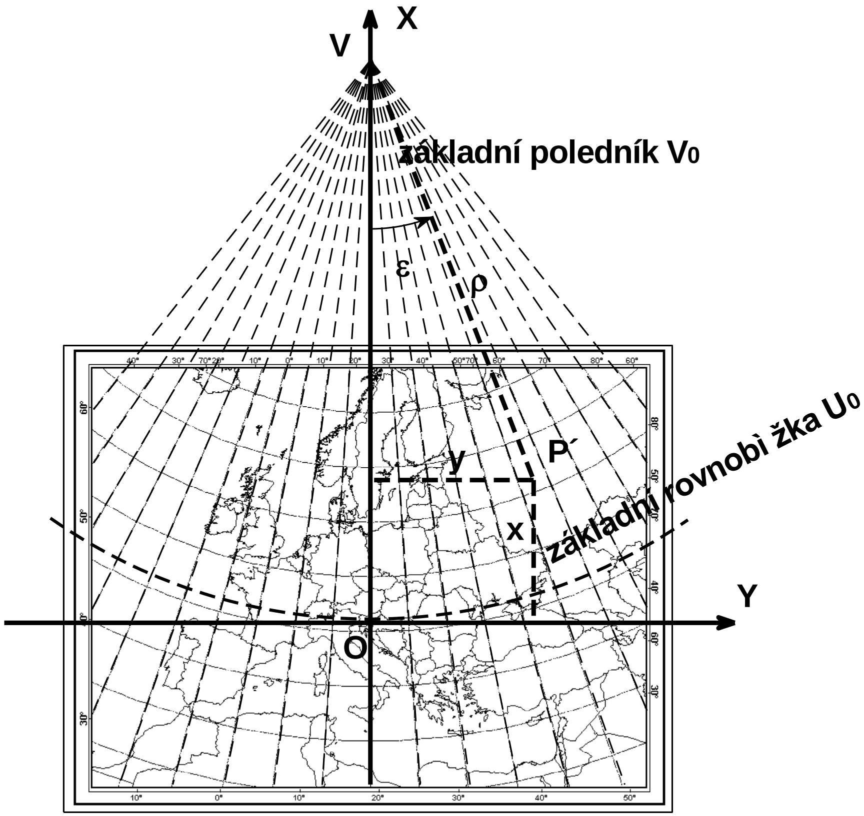
1. Základní vztahy a vzorce
2. Ekvidistantní zobrazení
3. Ekvivalentní zobrazení
4. Konformní zobrazení
5. Šikmá poloha kuželového zobrazení

1

ZÁKLADNÍ VZTAHY A VZORCE

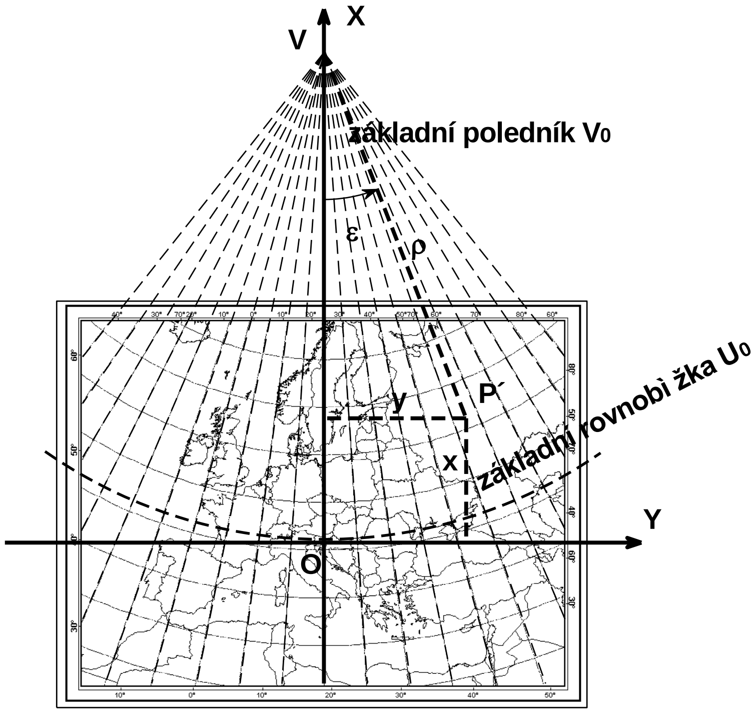
Základní vztahy a vzorce

- řeší se v rovinných polárních souřadnicích ρ a ε
- po zobrazení do roviny ještě transformace na pravoúhlé souřadnice x a y
- je to jednoduché zobrazení, stále platí, že poledníky a rovnoběžky jsou vzájemně kolmé
- Základní poledník V_0 se stanoví v ose zobrazeného území:
  - ztotožňuje se s osou x
  - x směřuje nahoru a y doprava
- Základní rovnoběžka U_0 přibližně prochází středem zobrazovaného území.



Základní vztahy a vzorce

- jednoduché zobrazení
- ekvideformáty tvoří soustředné kružnice se středem v počátku polárního systému V
- je možné nalézt vždy jednu ekvideformátu s minimální hodnotou zkreslení
- obrazem pólu může být bod nebo část kružnice
- kuželová zobrazení mohou být řešena s jednou nebo dvěma nezkreslenými rovnoběžkami
- zobrazení jsou matematicky definovaná, přesto je možné si je geometricky představit jako tečný, resp. sečný kužel

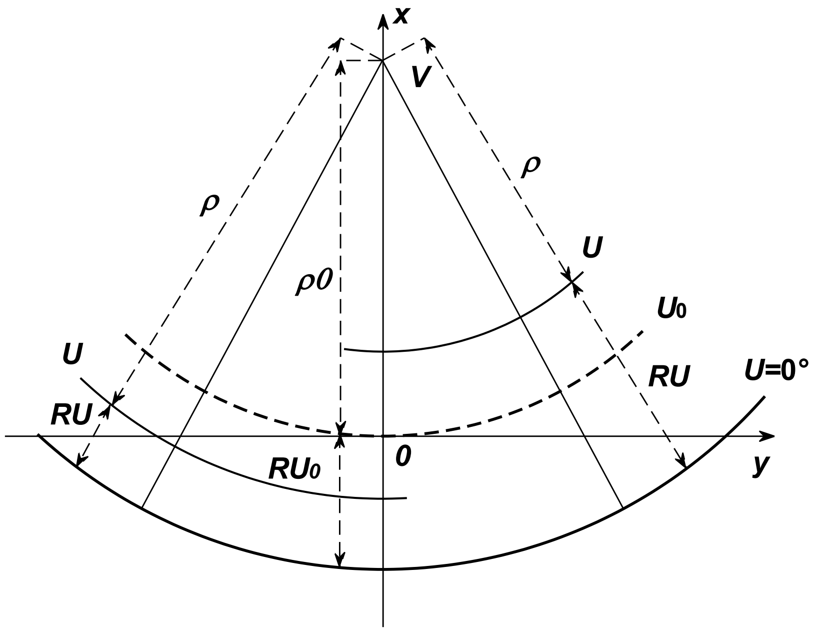


Základní vztahy a vzorce

$$\rho = f(U)$$
$$\varepsilon = f(V)$$

Dá se psát jako:

$$\rho = \rho_0 + f(U - U_0)$$



$$\rho_0 = x_v$$

ρ_0 poloměr základní rovnoběžky

x_v vzdálenost počátku souřadnic polárních (vrcholu V) a počátku souřadnic pravoúhlých (bod 0)

Základní vztahy a vzorce

Přírůstek úhlové vzdálenosti musí být konstantní s přírůstkem zem. délky:

$$\varepsilon = nV$$

Konstanta n:
- rozsah od 0 do 1
- pro n = 1 přechází v azimutální zobrazení

V případě rovníkové nebo šikmé polohy se použijí kartografické souřadnice:

$$\rho = f(\check{S})$$
$$\varepsilon = f(D)$$

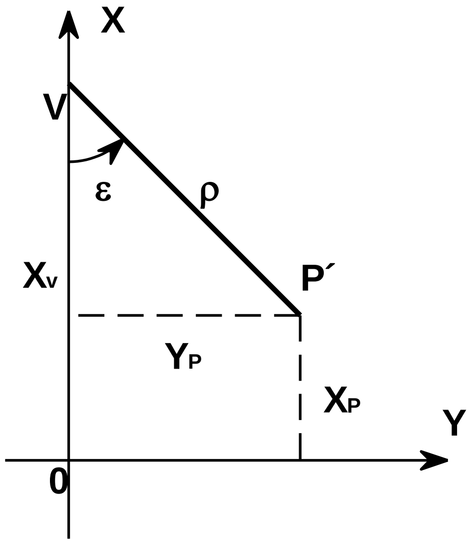
Základní vztahy a vzorce

Počátek polární souřadnicové soustavy je v bodě V (vrchol kužele).

$$x = x_v - \rho \cos \varepsilon$$

$$y = \rho \sin \varepsilon$$

x směřuje nahoru a y doprava!
Potřebujeme znát x_V.



Základní vztahy a vzorce

$$m = \frac{dS}{ds}$$

délkový element v zobrazovací rovině / délkový element na referenční ploše

$$m_p = \frac{-d\rho}{RdU}$$

element poledníku v rovině / element poledníku na kouli
U roste a ρ klesá – proto mínus.

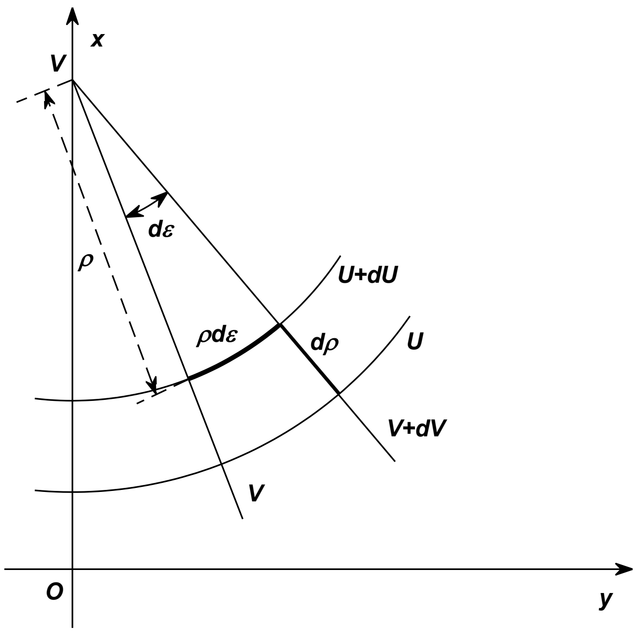
$$m_r = \frac{\rho d\varepsilon}{R\cos U dV}$$

element rovnoběžky v rovině / element rovnoběžky na kouli

$$d\varepsilon = n dV$$

$$n = \frac{d\varepsilon}{dV}$$

$$m_r = \frac{n\rho}{R\cos U}$$



$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p}$$

$$m_{pl} = m_r m_p$$

2

EKVIDISTANTNÍ ZOBRAZENÍ

Ekvidistantní zobrazení

- Ekvidistantní může být pouze v polednících.
- Vzdálenosti obrazů rovnoběžek se nemění.

podmínka:

$$m_p = 1$$

$$\frac{-d\rho}{RdU} = 1 \qquad \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho = -R\int_{U_0}^{U} dU$$

1. zobrazovací rovnice:

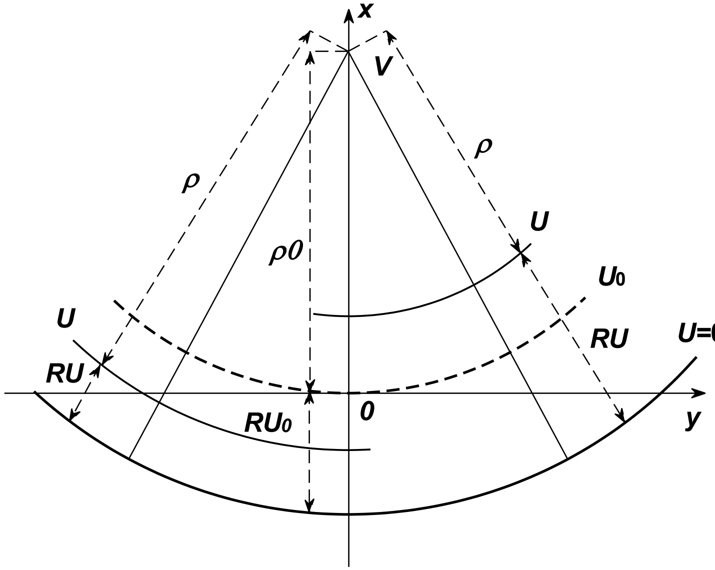
$$\rho = \rho_0 - R(U - U_0)$$

2. zobrazovací rovnice:

$$\varepsilon = nV$$

$$m_r = m_{pl} = \frac{n\rho}{R\cos U}$$

$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{n\rho - R\cos U}{n\rho + R\cos U}$$



potřebujeme n, ρ_0, R, U_0

Ekvidistantní zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou

Podmínka:

- na základní rovnoběžce U_0 bude délkové zkreslení minimální
- zároveň tato rovnoběžka bude délkově nezkreslena
- Ptolemaiovo zobrazení - nejjednodušší ze všech kuželových zobrazení.

$$\frac{dm_{r_0}}{dU} = \frac{d\left(\frac{n\rho_0}{R\cos U_0}\right)}{dU} = 0$$

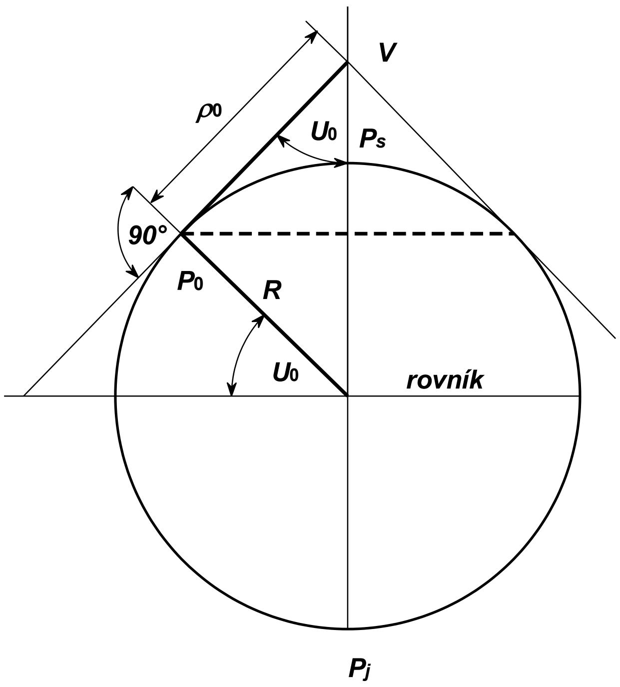
potřebujeme n, ρ_0, R, U_0

$$\frac{n\rho_0}{R\cos U_0} = 1$$

z obrázku:

koule: $n = \sin U_0$ $\qquad$ $\rho_0 = R \operatorname{cotg} U_0$

elipsoid: $n = \sin \varphi_0$ $\qquad$ $\rho_0 = N_0 \operatorname{cotg} \varphi_0$



Ekvidistantní zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou

Potřebujeme n, ρ_0, R, U_0

- Musíme určit základní (a nezkreslenou) rovnoběžku U_0.
- Ale zkreslení není symetrické – roste rychleji k pólu, na severní polokouli na sever. U_0 proto není dobré dávat doprostřed mapy, ale více na sever.
- Definujeme si podmínku, že zkreslení musí být stejné na severním i jižním okraji – na rovnoběžkách U_s a U_j.

$$m_{r_s} = m_{r_j}$$

$$\frac{n\rho_s}{R\cos U_s} = \frac{n\rho_j}{R\cos U_j}$$

po dosazení zobrazovací rovnice $\rho = \rho_0 + f(U - U_0)$

$$\rho_s = \rho_0 - R(U_s - U_0) \qquad \rho_j = \rho_0 - R(U_j - U_0)$$

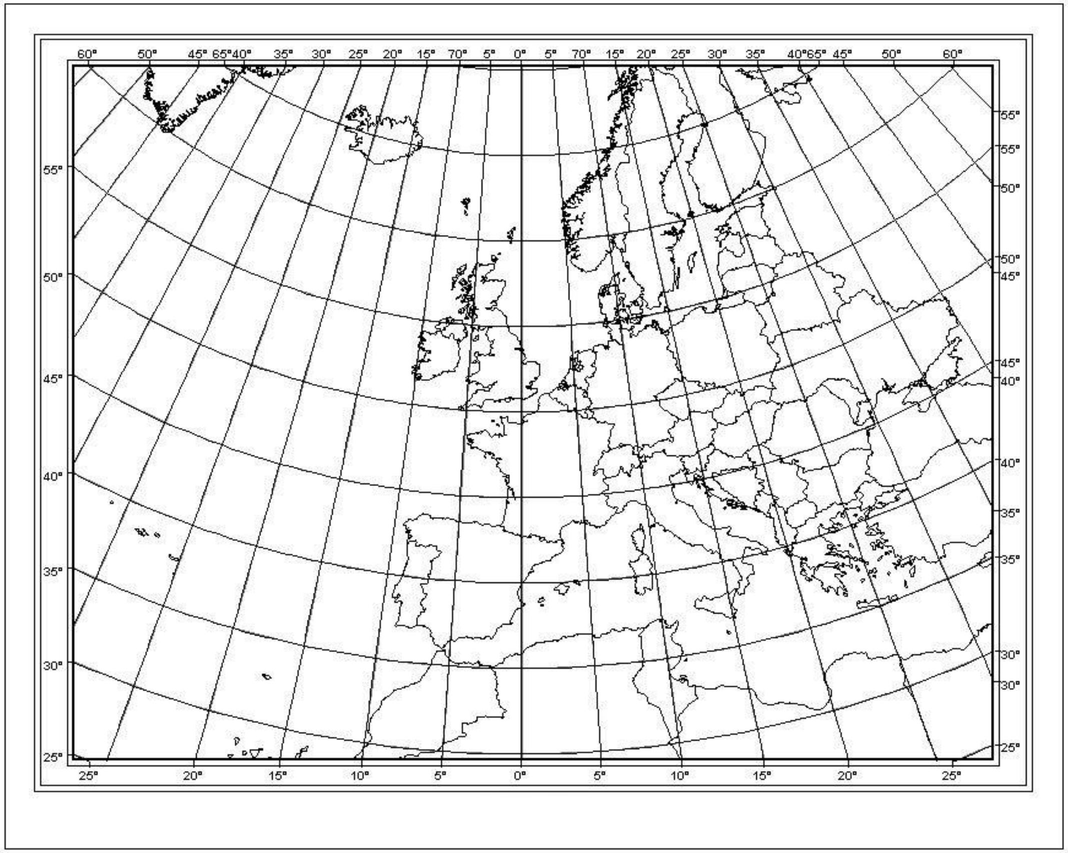
$$\operatorname{cotg} U_0 = \frac{U_s \cos U_j - U_j \cos U_s}{\cos U_j - \cos U_s} - U_0$$

Rovnice se řeší v několika krocích, začíná se s: $U_0 = \frac{U_s + U_j}{2}$

Ale finální U_0 bude jiné!

Ekvidistantní zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou

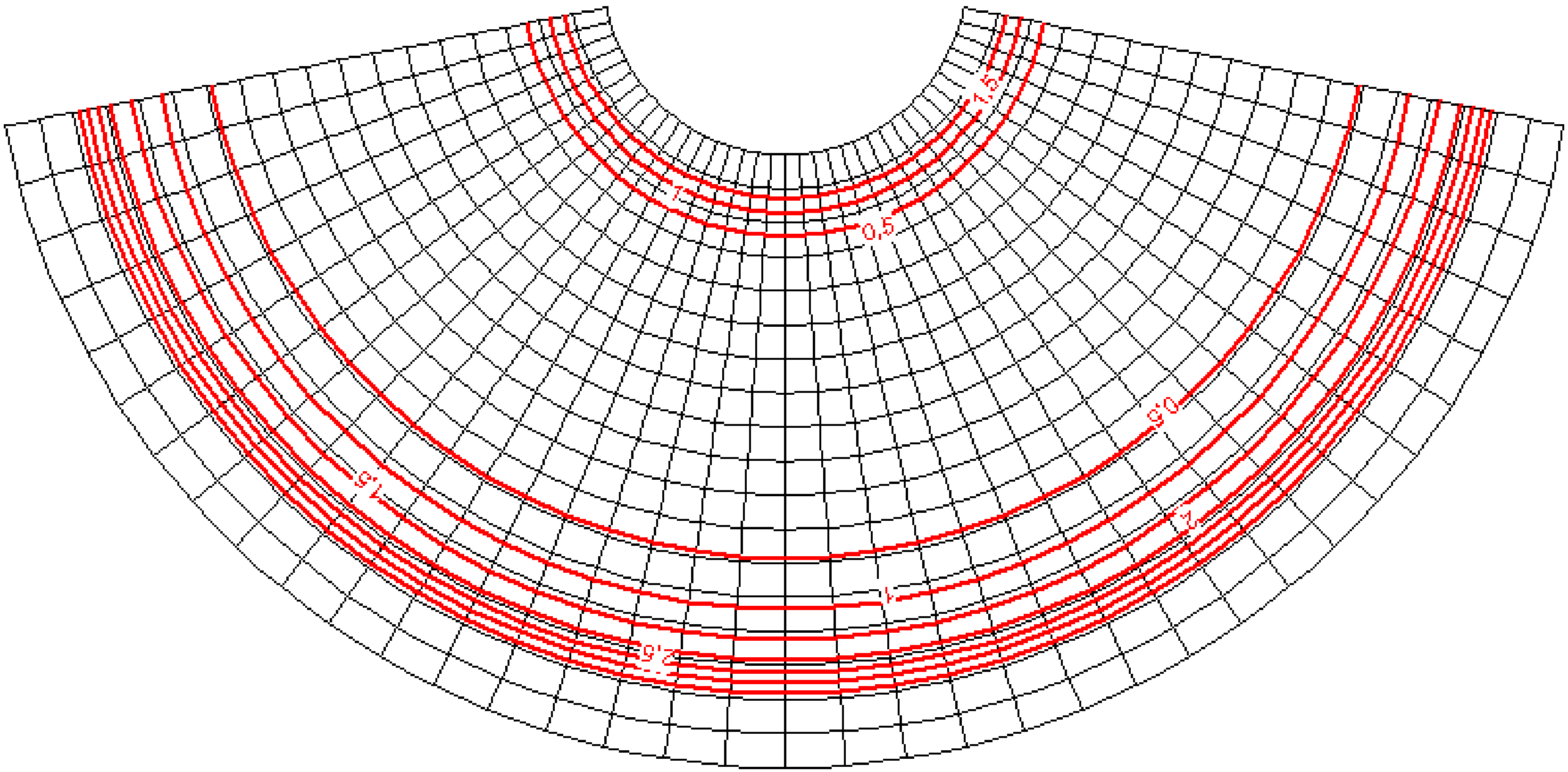
- Ukázka Ptolemaiova zobrazení pro Us=70° a Uj=30°.
- Nezkreslená základní rovnoběžka U_0 není 50°!
- Velké zkreslení na okrajích mapy.



Ekvidistantní zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou

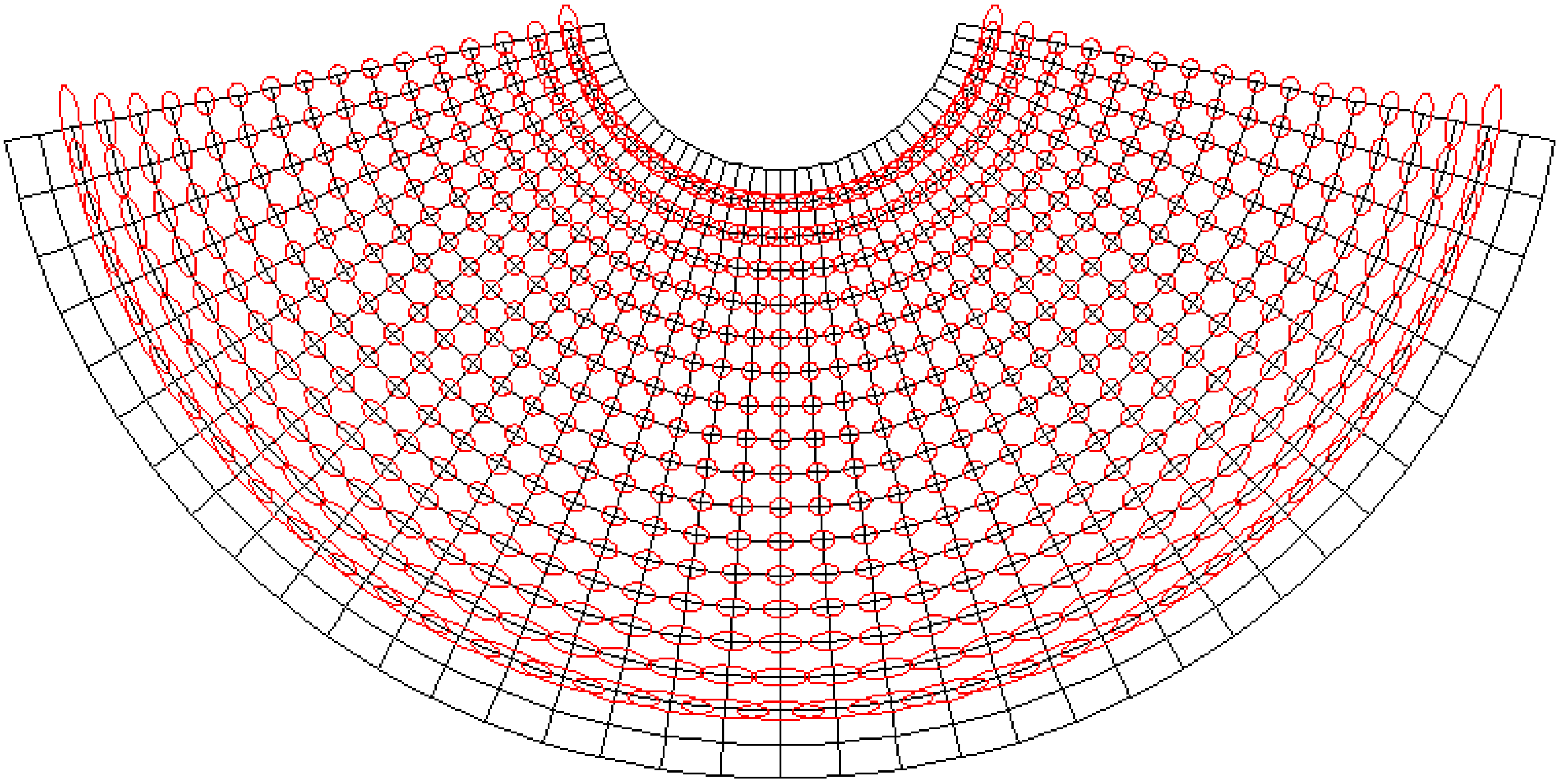
$$\nu_m = m - 1$$

Základní rovnoběžka: U_0=45°
Hodnota ekvideformát v poměrové formě: m_r-1 (U_0 má hodnotu 0)
Krok ekvideformát: 0,5



Ekvidistantní zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou

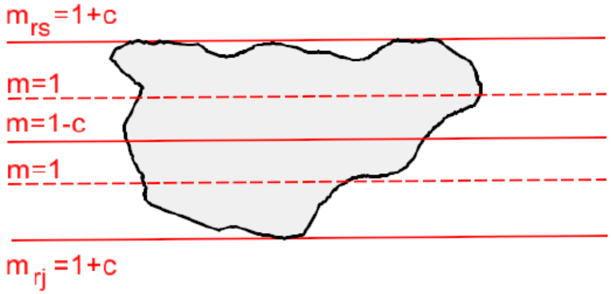
Základní rovnoběžka: $U_0=45°$, Tissotovy indikatrix



Ekvidistantní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

Podmínka:

- Dvě předem dané nezkreslené rovnoběžky o zeměpisných šířkách U_1 a U_2
- Umožní zmírnit zkreslení na okrajích mapy.
- de l´Isleovo zobrazení



$$m_{r_1} = \frac{n\rho_1}{R\cos U_1} = 1 \qquad m_{r_2} = \frac{n\rho_2}{R\cos U_2} = 1$$

$$R\cos U_1 = n[\rho_0 - R(U_1 - U_0)] \qquad R\cos U_2 = n[\rho_0 - R(U_2 - U_0)]$$

$$R(\cos U_1 - \cos U_2) = nR(U_2 - U_1)$$

$$n = \frac{\cos U_1 - \cos U_2}{U_2 - U_1}$$

Ekvidistantní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

$$R\cos U_1 = n\left[\rho_0 - R(U_1 - U_0)\right]$$

po dosazení n:

$$n = \frac{\cos U_1 - \cos U_2}{U_2 - U_1}$$

$$R\cos U_1 = \frac{\cos U_1 - \cos U_2}{U_2 - U_1}\left[\rho_0 - R(U_1 - U_0)\right]$$

$$\rho_0 = \frac{R\left[(U_2 - U_0)\cos U_1 - (U_1 - U_0)\cos U_2\right]}{\cos U_1 - \cos U_2}$$

de l´Isle stanovil základní rovnoběžku a nezkreslené rovnoběžky takto:

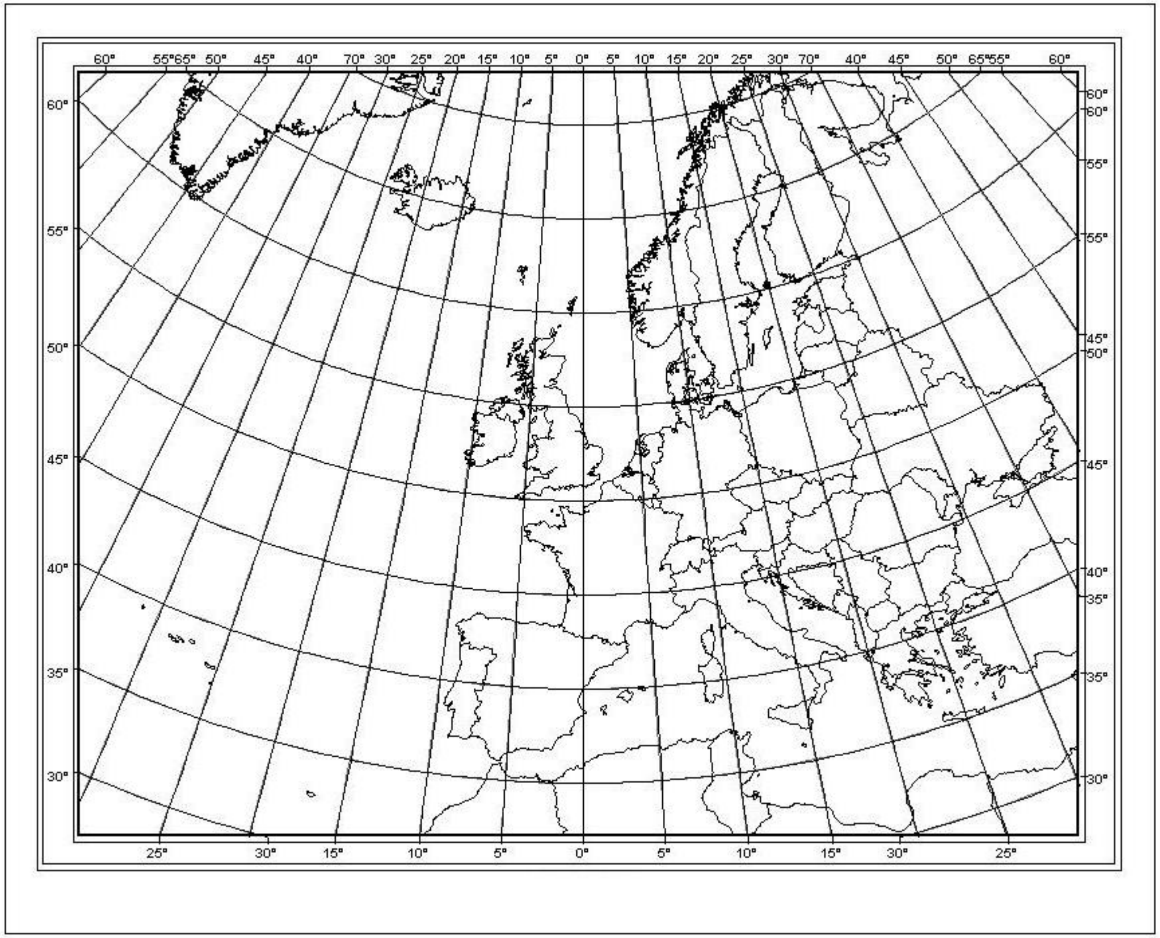
$$U_0 = \frac{U_s + U_j}{2}$$

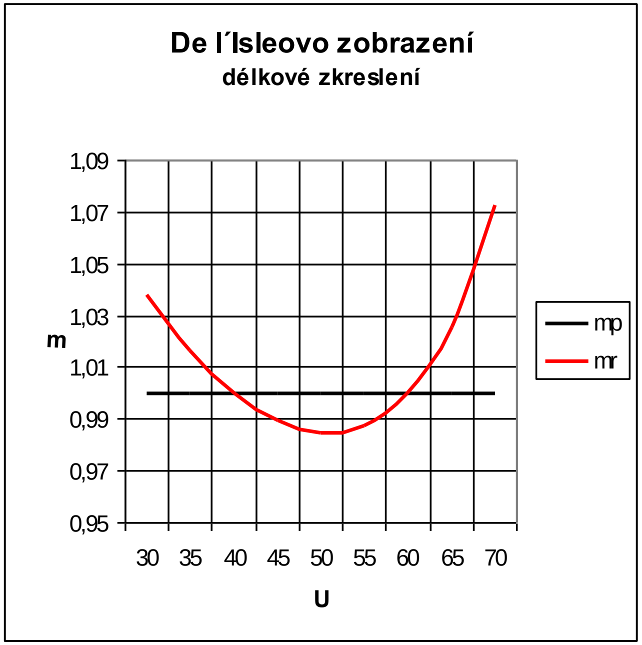
$$U_1 = \frac{U_J + U_0}{2}$$

$$U_2 = \frac{U_s + U_0}{2}$$

Ekvidistantní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

Ukázka použití de l´Isleova zobrazení pro Us=70° a Uj =30°.





Nezkreslené tedy jsou? U_1=40° a U_2=60°. Zkreslení na severu a jihu je odlišné.

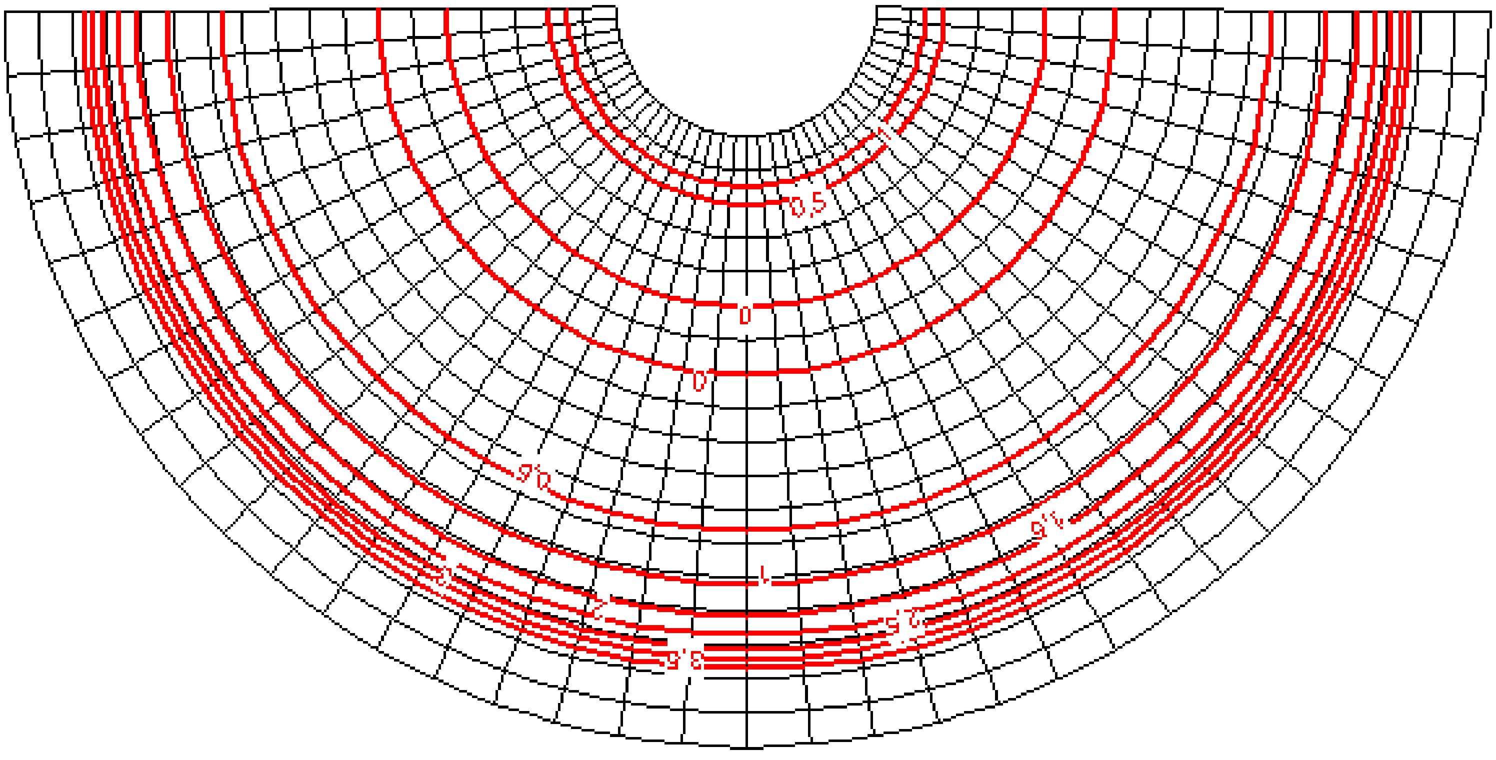
Ekvidistantní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

Nezkreslené rovnoběžky: U_1=20°, U_2=40°

Hodnota ekvideformát v poměrové formě: m_r-1 (U1 a U2 mají hodnotu 0)

Krok ekvideformát: 0,5

Vzdálenost rovnoběžek se nemění.



Ekvidistantní zobrazení s totožným zkreslením na severu a jihu

Podmínka:

- Totožné zkreslení nejsevernější a nejjižnější rovnoběžky – např. v atlasech.
- Zkreslení roste rychleji na sever než na jih, resp. k bližšímu pólu!
- Neurčují se tedy předem jaké rovnoběžky jsou nezkreslené. To se spočítá.
- Vitkovského zobrazení – stanovil ještě další podmínky:
- Základní rovnoběžka je uprostřed zobrazení. Není to ta v nejnižším bodě křivky m_r!
- Základní rovnoběžka má stejnou absolutní hodnotu zkreslení jako ty krajní. Neví se ale jakou hodnotu.

$$m_{r_s} = m_{r_j}$$

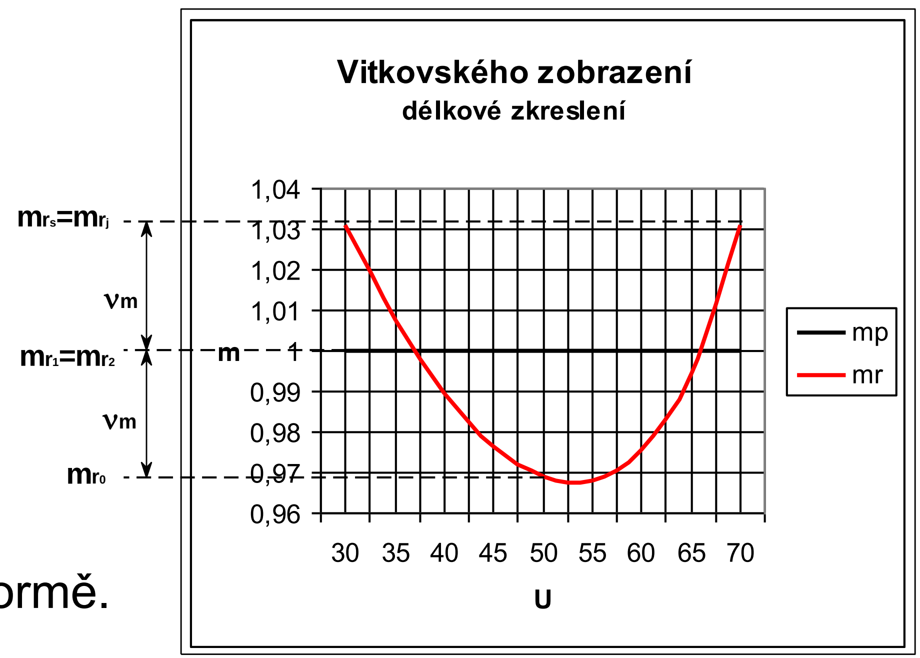
$$U_0 = \frac{U_s + U_j}{2}$$

$$m_{r_s} = m_{r_j} = 1 + \nu_m$$

$$m_{r_0} = 1 - \nu_m$$

$$\nu_m = m - 1$$

Délkové zkreslení vyjádřené v poměrové formě.



Ekvidistantní zobrazení s totožným zkreslením na severu a jihu

1. podmínka:

$$m_{r_s} = m_{r_j} \qquad \frac{n\rho_s}{R\cos U_s} = \frac{n\rho_j}{R\cos U_j} \qquad \rho_0 = \frac{R\left[\left(U_s - U_0\right)\cos U_j - \left(U_j - U_0\right)\cos U_s\right]}{\cos U_j - \cos U_s}$$

2. podmínka:

$$m_{r_s} = m_{r_j} = 1 + \nu_m$$

$$m_{r_0} = 1 - \nu_m$$

$$m_{r_s} + m_{r_0} = 2 \qquad \frac{n\rho_s}{R\cos U_s} + \frac{n\rho_0}{R\cos U_0} = 2 \qquad n = \frac{2R\cos U_s \cos U_0}{\rho_s \cos U_0 + \rho_0 \cos U_s}$$

Ekvidistantní zobrazení s totožným zkreslením na severu a jihu

Pokud potřebuji znát nezkreslené rovnoběžky U_1 a U_2:

$$m_{r_1} = \frac{n\rho_1}{R\cos U_1} = 1$$

$$m_{r_2} = \frac{n\rho_2}{R\cos U_2} = 1$$

$$\cos U_1 = n\left(\frac{\rho_0}{R} - U_1 + U_0\right)$$

$$\cos U_2 = n\left(\frac{\rho_0}{R} - U_2 + U_0\right)$$

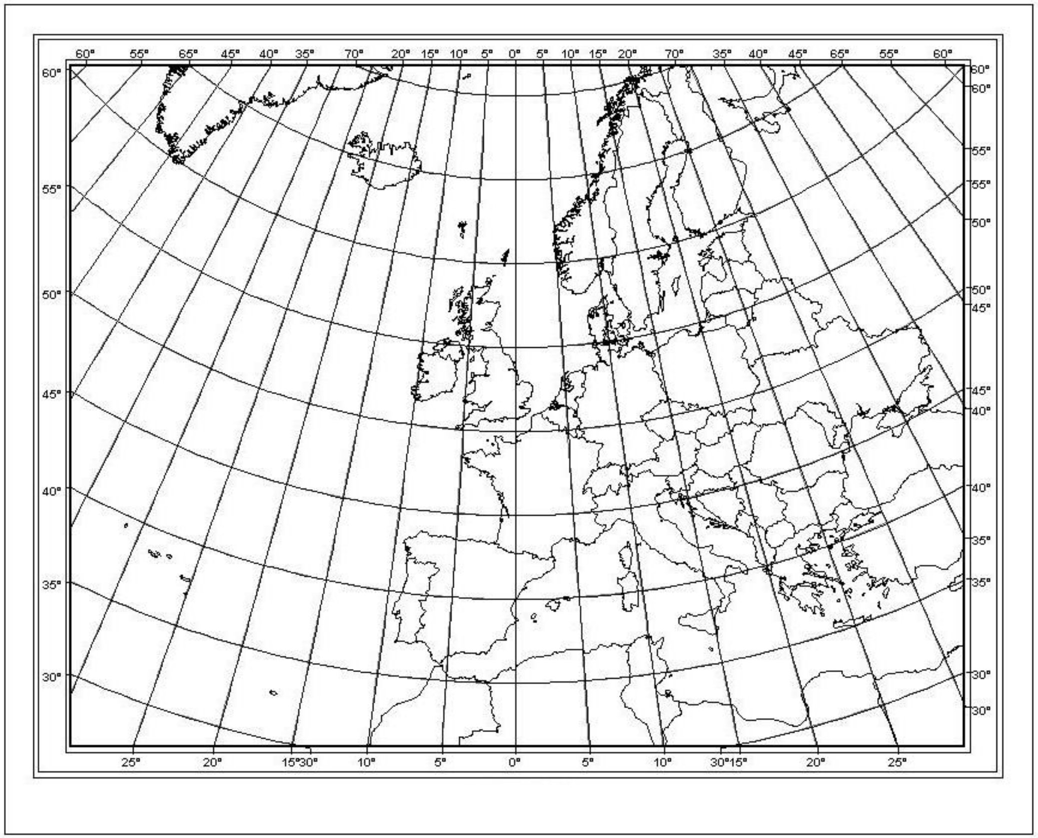
Použije se metoda postupné aproximace. Pro první přiblížení se dosadí:

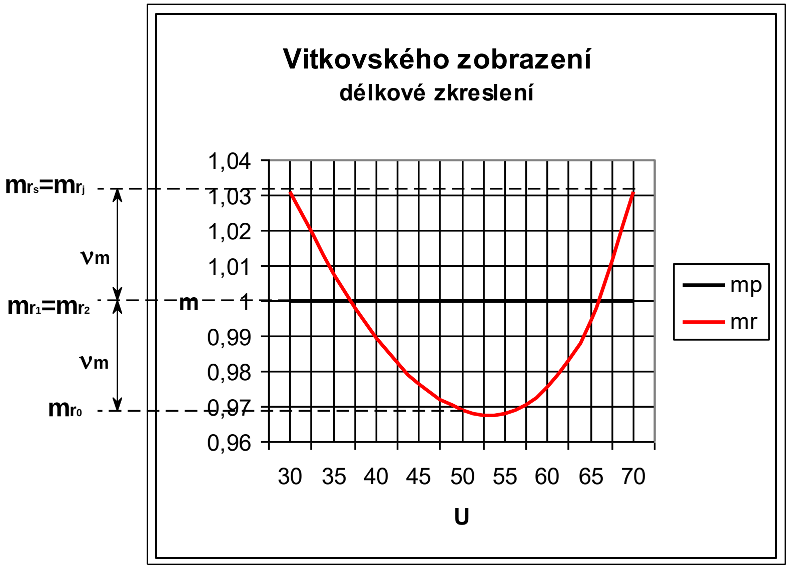
$$U_1 = \frac{U_j + U_0}{2}$$

$$U_2 = \frac{U_s + U_0}{2}$$

Ekvidistantní zobrazení s totožným zkreslením na severu a jihu

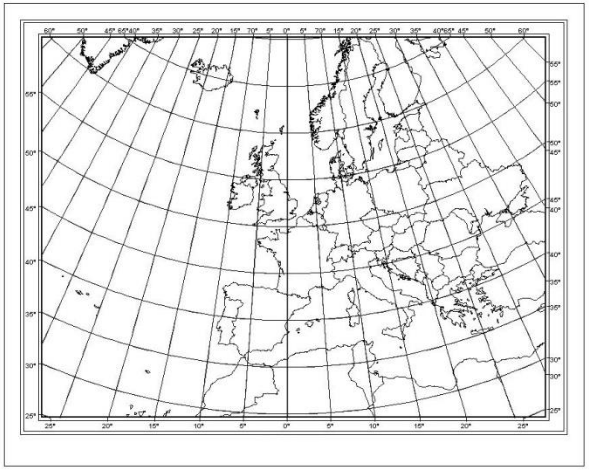
Ukázka Vitkovského zobrazení pro U_s=70° a U_j =30°



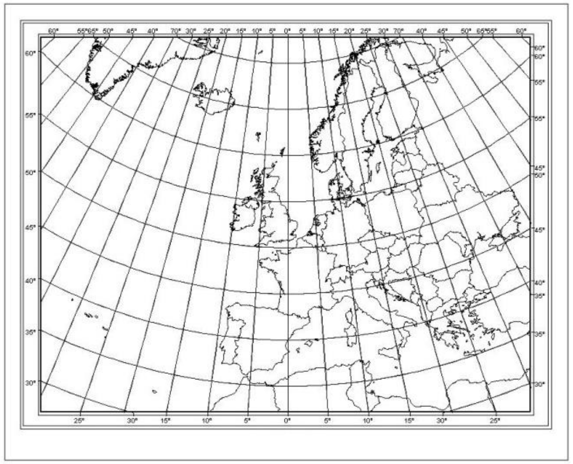


Lze spočítat:
U_1 = 36°55´
U_2 = 66°02´

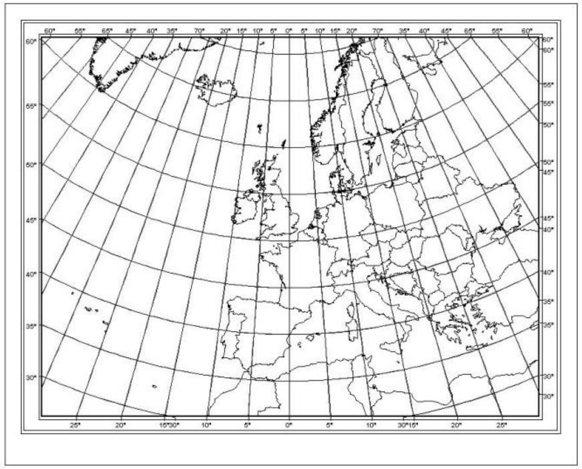
Porovnání zobrazení



Ptolemaiovo



de l´Isleovo



Vitkovského

3

EKVIVALENTNÍ ZOBRAZENÍ

Ekvivalentní zobrazení

- Vzájemné vzdálenosti obrazů rovnoběžek se zmenšují. Směrem od osové rovnoběžky.

podmínka: $m_{pl} = m_p m_r = 1$

$$\frac{-d\rho}{RdU}\frac{n\rho}{R\cos U} = 1 \qquad \int_{\rho_0}^{\rho} \rho d\rho = -\frac{R^2}{n}\int_{U_0}^{U} \cos U dU$$

1. zobrazovací rovnice:

$$\rho^2 = \rho_0^2 - \frac{2R^2}{n}\left(\sin U - \sin U_0\right)$$

2. zobrazovací rovnice:

$$\varepsilon = nV$$

$$m_r = \frac{1}{m_p} = \frac{n\rho}{R\cos U} \qquad m_{pl} = 1$$

$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{n^2\rho^2 - R^2\cos^2 U}{n^2\rho^2 + R^2\cos^2 U}$$

potřebujeme n, ρ_0, R, U_0

Ekvivalentní zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou a pólem zobrazeným coby bod

Podmínky:

- nezkreslená základní rovnoběžka U_0
- pól se zobrazí jako bod totožný s počátkem rovinného polárního souřadnicového systému (bod = oblouk s nulovou délkou)
- Lambertovo kuželové ekvivalentní zobrazení

podmínka 1:

$$\frac{n\rho_0}{R\cos U_0} = 1$$

podmínka 2: Do obecné zobrazovací rovnice se dosadí U=90° a ρ=0.

$$\rho^2 = \rho_0^2 - \frac{2R^2}{n}\left(\sin U - \sin U_0\right)$$

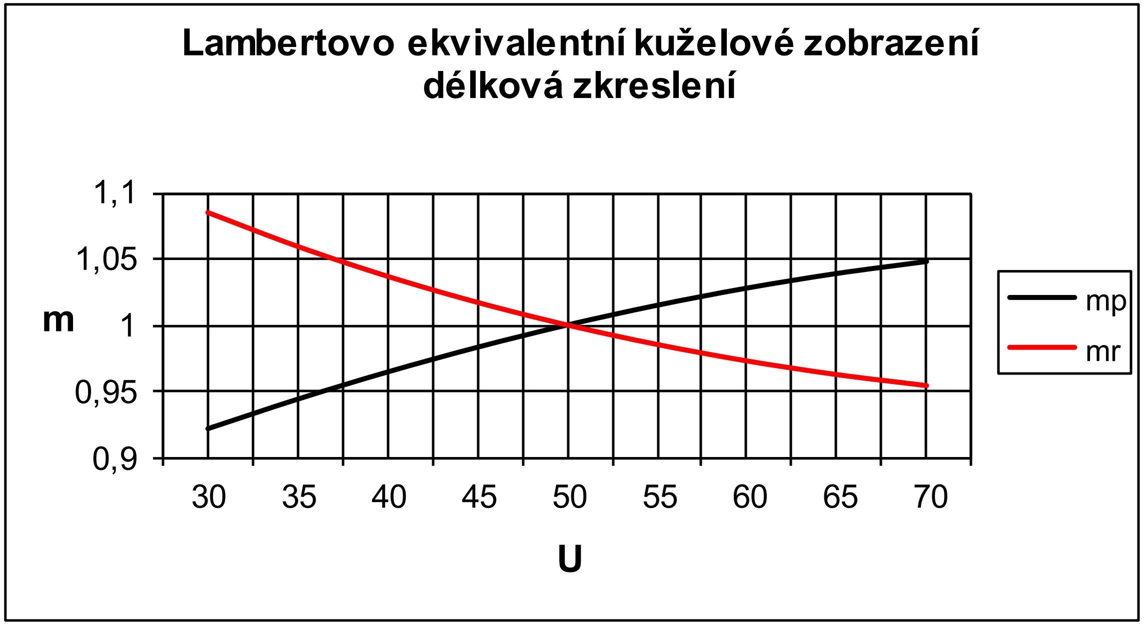
$$n = \frac{2R^2\left(1 - \sin U_0\right)}{\rho_0^2}$$

ze soustavy podmínek vychází:

$$\rho_0 = \frac{2R\left(1 - \sin U_0\right)}{\cos U_0} = 2R\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{U_0}{2}\right)$$

$$n = \frac{\cos^2 U_0}{2\left(1 - \sin U_0\right)} = \cos^2\left(45° - U_0\right)$$

Ekvivalentní zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou a pólem zobrazeným coby bod



$U_s = 70°$ $U_j = 30°$

Nezkreslená základní rovnoběžka U_0 se většinou volí jako střed mezi severní a jižní rovnoběžkou zobrazovaného území.

Ekvivalentní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

Podmínky:

- Dvě předem dané nezkreslené rovnoběžky o zeměpisných šířkách U_1 a U_2.
- Základní rovnoběžka U_0 je zkreslená.
- Většinou se volí jako střed mezi nezkreslenými rovnoběžkami.
- Albersovo zobrazení

$$m_{r_1} = \frac{n\rho_1}{R\cos U_1} = 1$$

$$m_{r_2} = \frac{n\rho_2}{R\cos U_2} = 1$$

$$n^2\left[\rho_0^2 - \frac{2R^2}{n}\left(\sin U_1 - \sin U_0\right)\right] = R^2\cos^2 U_1$$

$$n^2\left[\rho_0^2 - \frac{2R^2}{n}\left(\sin U_2 - \sin U_0\right)\right] = R^2\cos^2 U_2$$

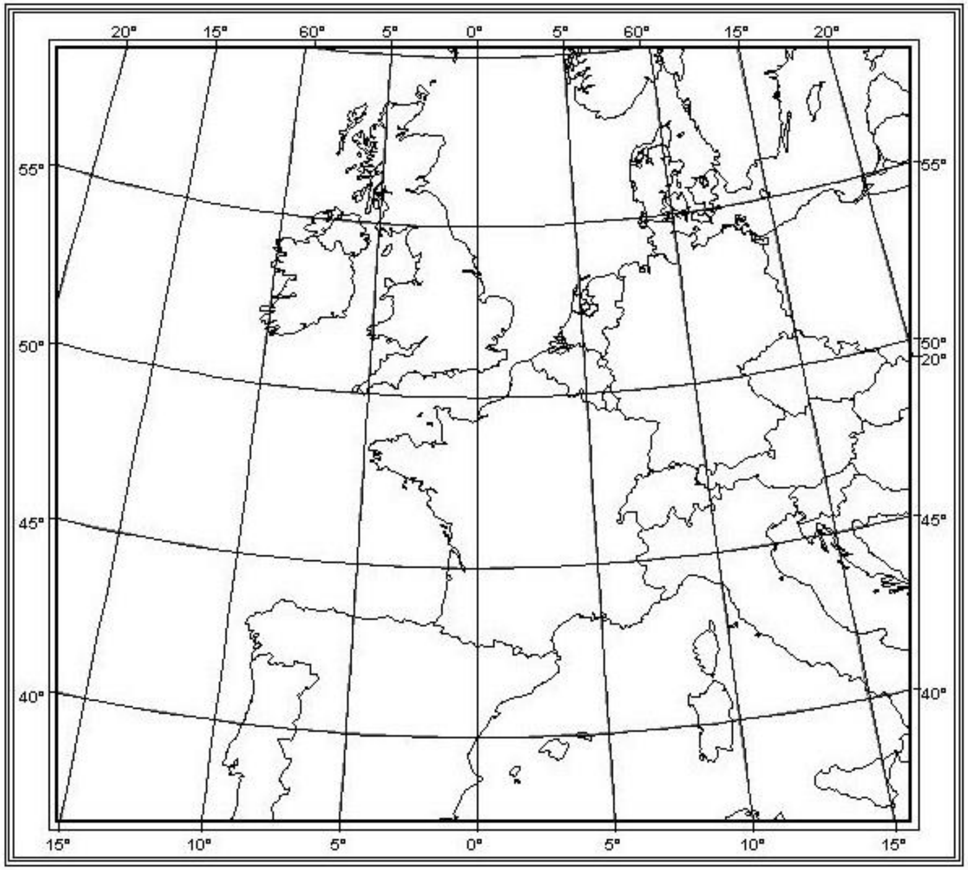
$$n = \frac{\cos^2 U_1 - \cos^2 U_2}{2\left(\sin U_2 - \sin U_1\right)} = \frac{1}{2}\left(\sin U_1 + \sin U_2\right)$$

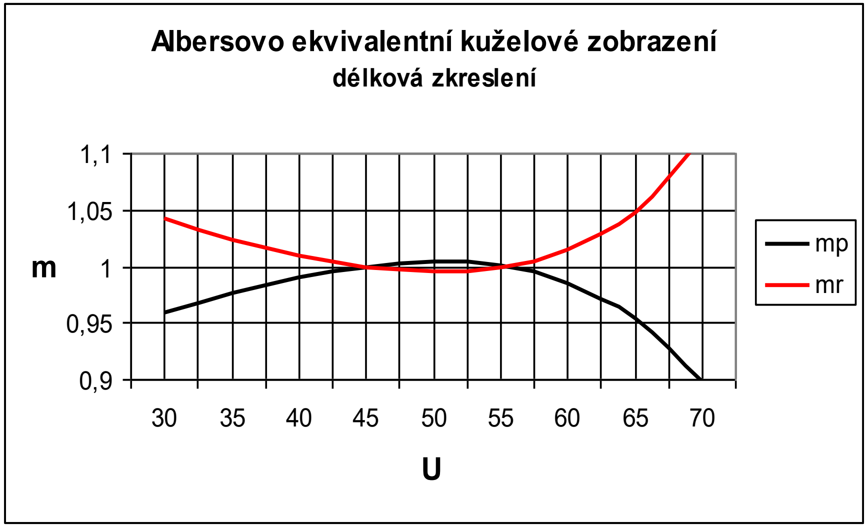
$$\rho_0^2 = \frac{2R^2}{n}\left(\sin U_1 - \sin U_0\right) + \frac{R^2\cos^2 U_1}{n^2}$$

Ekvivalentní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

Albersovo ekvivalentní kuželové zobrazení

- na obrázku pro U_s=60° a U_j=38°
- mimo tuto oblast již zkreslení hodně narůstá

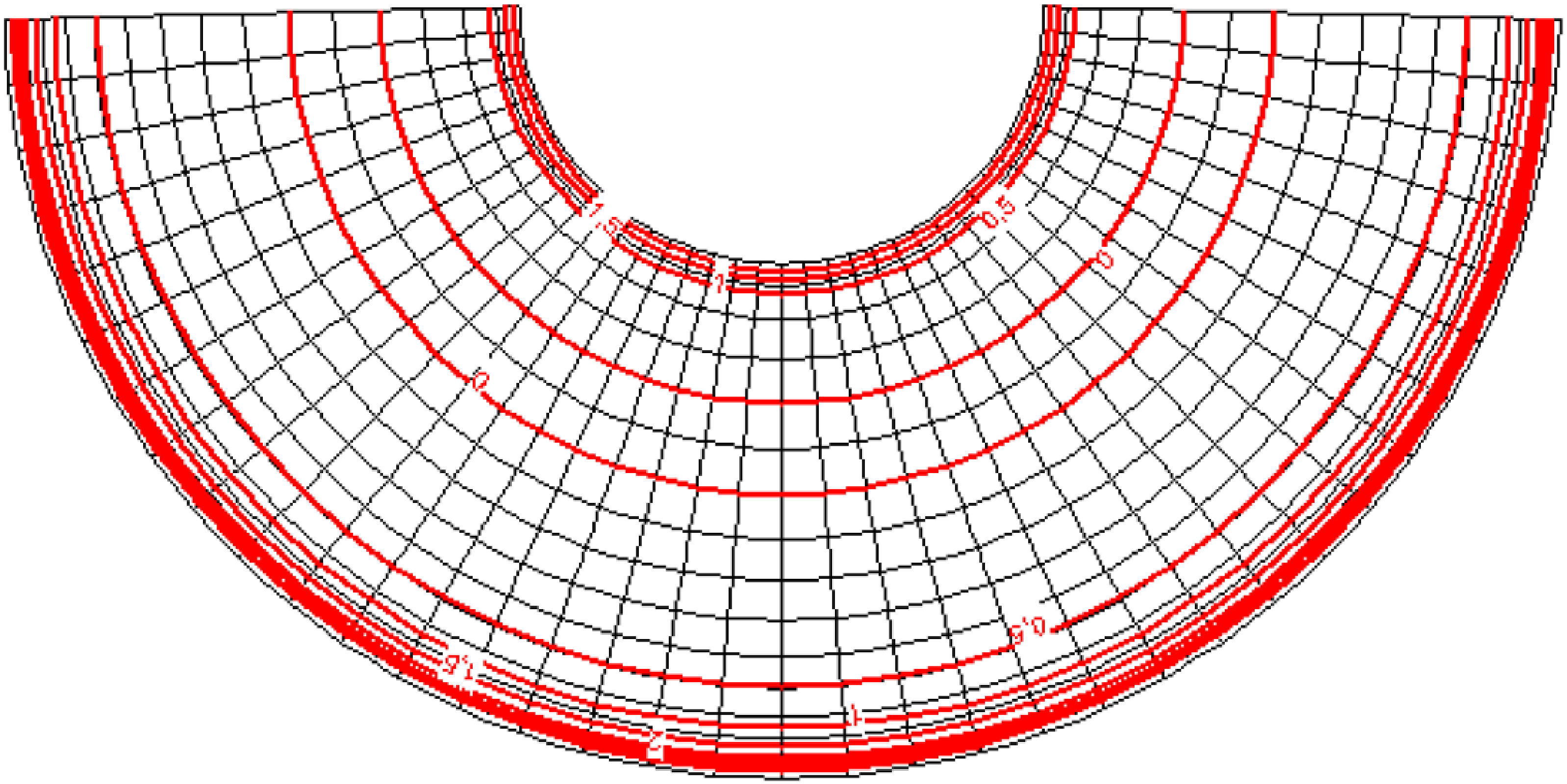




Ekvivalentní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

Nezkreslené rovnoběžky U1 = 20° a U2 = 40°.

Interval rovnoběžek se zmenšuje směrem od základní rovnoběžky.



4

KONFORMNÍ ZOBRAZENÍ

Konformní zobrazení

- Vzdálenosti obrazů rovnoběžek se zvětšují směrem od osové rovnoběžky.

podmínky:

$F = 0$ u jednoduchých zobrazení vždy splněno

$m_p = m_r$ $\quad \dfrac{-d\rho}{RdU} = \dfrac{n\rho}{R\cos U}$ $\quad \displaystyle\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -n \int_{U_0}^{U} \frac{dU}{\cos U}$

1. zobrazovací rovnice:

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{tg\left(\dfrac{U_0}{2} + 45°\right)}{tg\left(\dfrac{U}{2} + 45°\right)} \right]^n$$

2. zobrazovací rovnice:

$$\varepsilon = nV$$

$\rho = \rho_0 e^{n(Q_0 - Q)}$ při použití izometrické šířky a přirozeného logaritmu

rovnice zkreslení:

$m = \dfrac{n\rho}{R\cos U}$ $\quad m_{pl} = m^2$ $\quad \Delta\omega = 0$

potřebujeme n, ρ_0, R, U_0

Konformní zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou

- Zobrazení s jednou nezkreslenou základní rovnoběžkou.
- Ta se však zpravidla dodatečně zkresluje.
- Někdy se nazývá Lambert Conformal Conic (Single Parallel).

$$\rho_0 = m_0 R \operatorname{cotg} U_0$$

m_0 = délkové zkreslení základní rovnoběžky. Vždy menší než 1.

- Tím vzniká zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami U_1 a U_2.

Znáte nějaký příklad takového zobrazení?

- Uvedený typ zobrazení je použit i při zobrazení Základních map České republiky (Křovákovo zobrazení).
- Ale v šikmé poloze.

Konformní zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou

Výpočet U_1 a U_2:

$$m_{r_1} = \frac{n\rho_1}{R\cos U_1} = 1$$

$$m_{r_2} = \frac{n\rho_2}{R\cos U_2} = 1$$

Dosadí se obecná zobrazovací rovnice pro konformní zobrazení…

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{tg\left(\frac{U_0}{2} + 45°\right)}{tg\left(\frac{U}{2} + 45°\right)} \right]^n$$

… a zjistí se U_1 a U_2.

Výpočet n:

$$n = \sin U_0$$

Výpočet n jako u ekvidistantního kuželového zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou.

Konformní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

Podmínka:

- dvě předem dané nezkreslené rovnoběžky U_1 a U_2

Lambertovo konformní kuželové zobrazení - Lambert Conformal Conic (LCC)

konstanta n – z nezkreslených rovnoběžek:

$$m_{r_1} = \frac{n\rho_1}{R\cos U_1} = 1 \qquad \rho_1 = \frac{R\cos U_1}{n} \qquad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\cos U_1}{\cos U_2}$$

$$m_{r_2} = \frac{n\rho_2}{R\cos U_2} = 1 \qquad \rho_2 = \frac{R\cos U_2}{n}$$

$$\frac{\cos U_1}{\cos U_2} = \frac{\rho_0\left[\dfrac{tg\left(\dfrac{U_0}{2}+45°\right)}{tg\left(\dfrac{U_1}{2}+45°\right)}\right]^n}{\rho_0\left[\dfrac{tg\left(\dfrac{U_0}{2}+45°\right)}{tg\left(\dfrac{U_2}{2}+45°\right)}\right]^n} = \left[\frac{tg\left(\dfrac{U_2}{2}+45°\right)}{tg\left(\dfrac{U_1}{2}+45°\right)}\right]^n$$

$$n = \frac{\ln\cos U_1 - \ln\cos U_2}{\ln \mathrm{tg}(\frac{U_2}{2}+45°) - \ln \mathrm{tg}(\frac{U_1}{2}+45°)}$$

$$n = \frac{\ln\cos U_1 - \ln\cos U_2}{Q_2 - Q_1}$$

Konformní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

konstanta ρ_0 – ze zobrazovací rovnice

$$\rho_0 = \frac{R\cos U_1}{n}\left[\frac{tg\left(\frac{U_1}{2}+45°\right)}{tg\left(\frac{U_0}{2}+45°\right)}\right]^n = \frac{R\cos U_2}{n}\left[\frac{tg\left(\frac{U_2}{2}+45°\right)}{tg\left(\frac{U_0}{2}+45°\right)}\right]^n$$

nebo taky

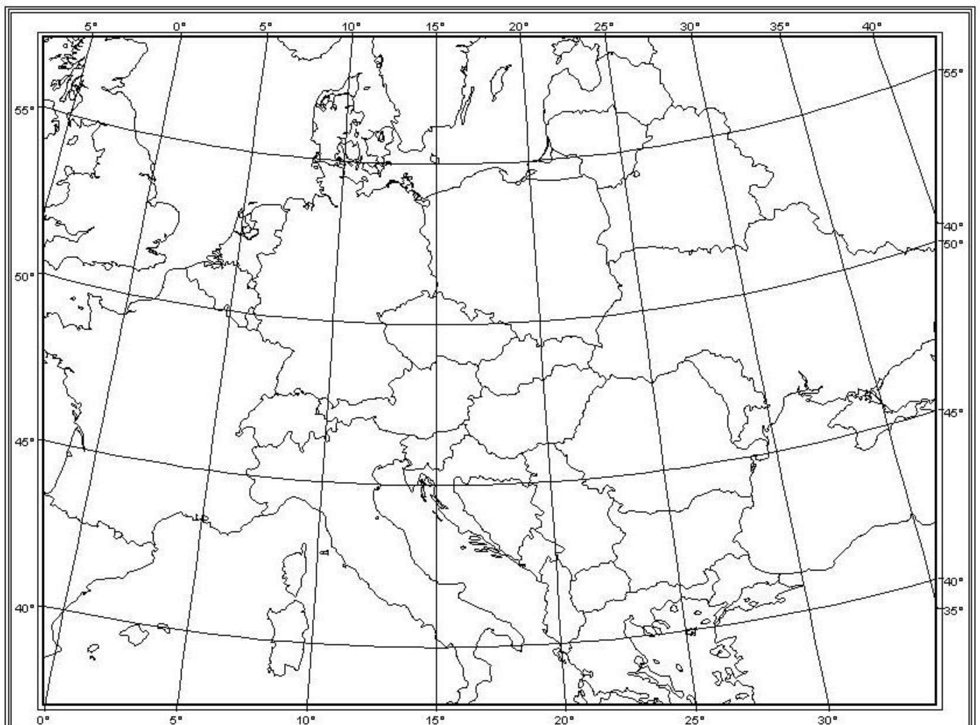
$$\rho_0 = \frac{R\cos U_1}{n} e^{n(Q_1-Q_0)} = \frac{R\cos U_2}{n} e^{n(Q_2-Q_0)}$$

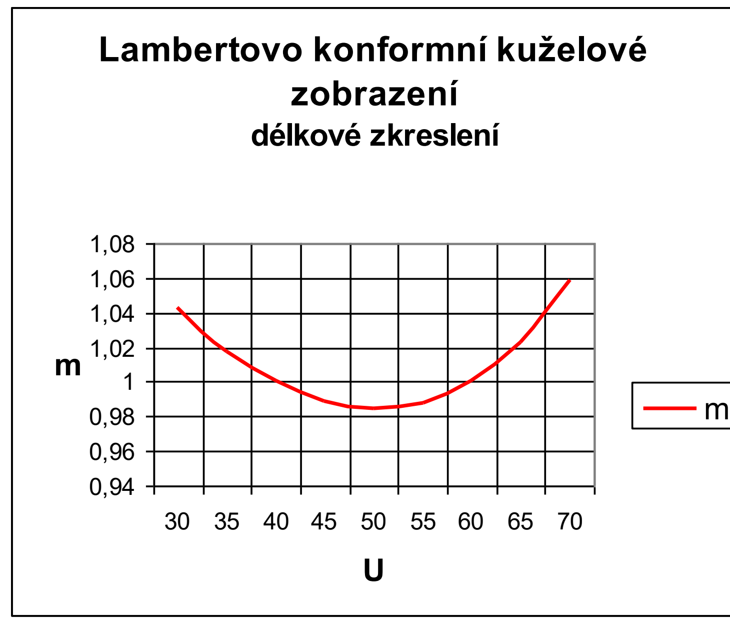
e – přirozený logaritmus

Základní rovnoběžka U_0 se většinou volí uprostřed mezi nezkreslenými U_1 a U_2.

Konformní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

- Lambertovo konformní kuželové zobrazení
- Letecké navigační mapy ICAO a NATO.
- V rámci směrnice INSPIRE využíváno pro publikaci dat - souřadnicový referenční systém (ETRS89-LCC).



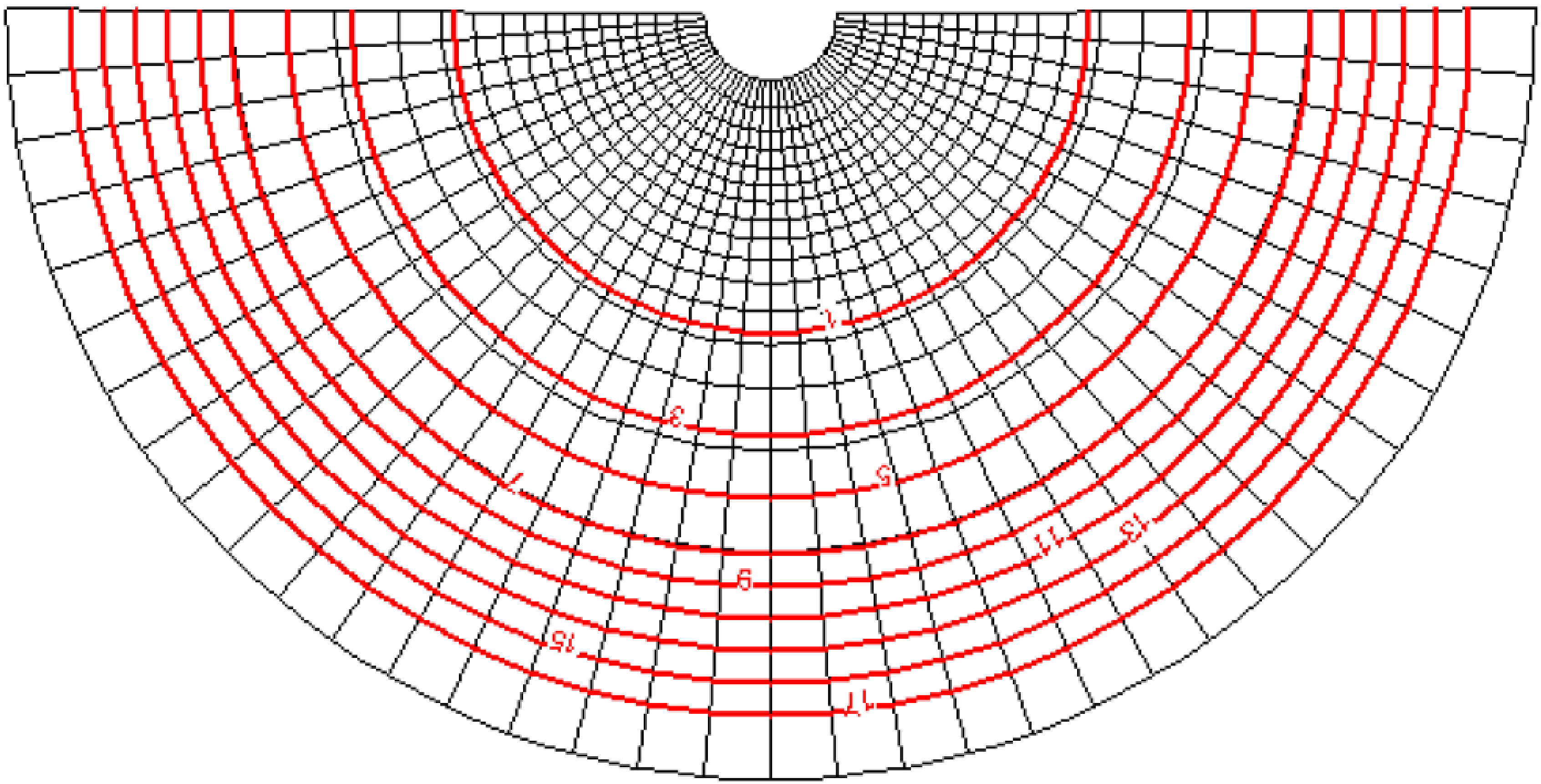


$U_1 = 40°$ a $U_2 = 60°$

Konformní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

Nezkreslené rovnoběžky U1 = 20° a U2 = 40°.

Interval rovnoběžek se zvětšuje směrem od základní rovnoběžky.



5

ŠIKMÁ POLOHA KUŽELOVÉHO ZOBRAZENÍ

Šikmá poloha kuželového zobrazení

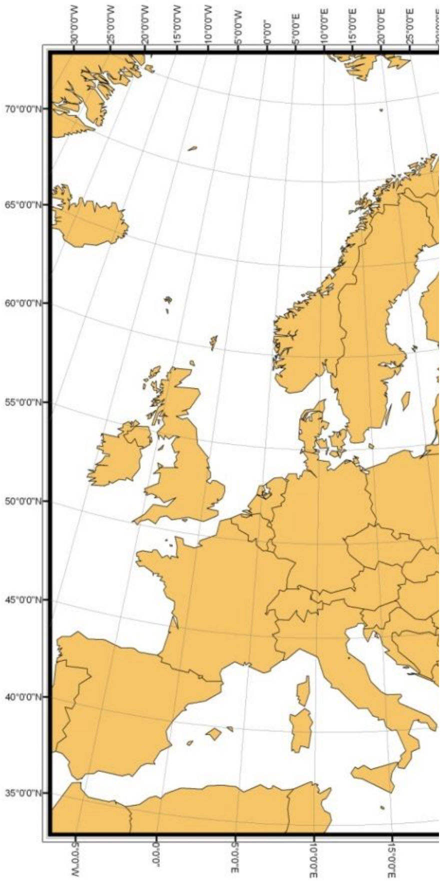
- Území s protáhlým tvarem, ale ne ve směru rovnoběžky.
- Použijí se kartografické souřadnice.
- Ze zeměpisných souřadnic se vypočtou kartografické souřadnice.
- Kartografické souřadnice se přepočítají do roviny.

$$\rho = f(\check{S})$$
$$\varepsilon = f(D)$$

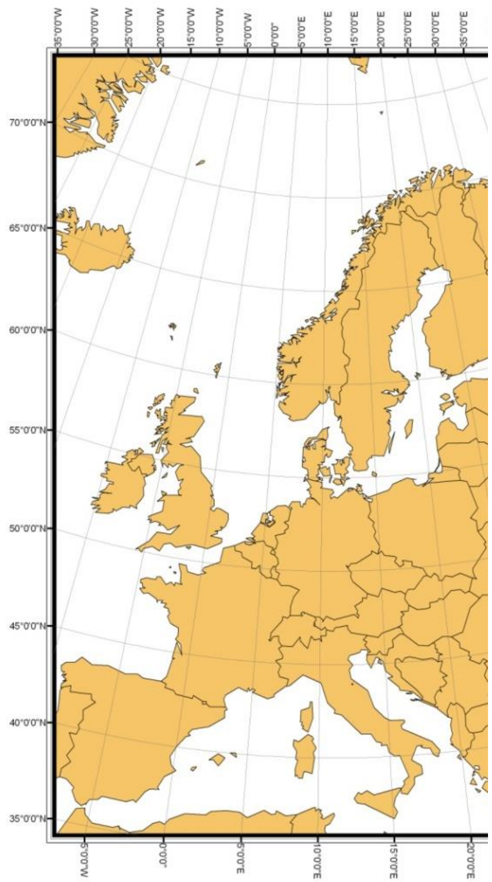
Viz později - Křovákovo zobrazení.

Porovnání zobrazení

Albers (ekvivalentní)



Ekvidistantní kuželové



LCC
Lambert Conformal Conic