

C2142 Návrh algoritmů pro přírodovědce

8. Nejkratší vzdálenosti.

Tomáš Raček

Nejkratší vzdálenosti v grafu

Problém. Určete nejkratší vzdálenost mezi vrcholy u a v v grafu.

Pozorování. V tuto chvíli můžeme posuzovat vzdálenost pouze jako počet hran na cestě mezi u a v .

Takový výpočet realizuje **prohledávání do šířky (BFS)** v lineárním čase vůči velikosti grafu.

Rozšíření. Uvažme případ, kdy bychom chtěli přiřadit hranám na cestě různou váhu.

Graf $G = (V, E, w_e)$ nazveme **hranově ohodnocený**, w_e je funkce, která každé hraně přiřazuje její ohodnocení – reálné číslo.

Nejkratší vzdálenost mezi dvěma vrcholy v grafu je minimální součet ohodnocení hran některé cesty mezi těmito vrcholy.

Matice vzdáleností

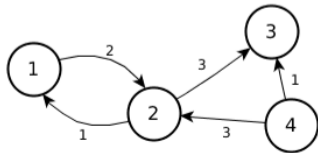
Poznámka. Na hranově neohodnocený graf se lze dívat jako na speciální případ ohodnoceného, kde $\forall (u, v) \in E : w_e(u, v) = 1$.

Matice vzdáleností W je rozšíření matice sousednosti:

$$W_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j \\ w_e(i, j) & \text{pro } (i, j) \in E \\ \infty & \text{pro } (i, j) \notin E \end{cases}$$

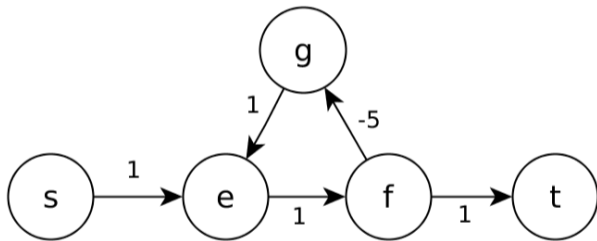
Příklad

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Záporný cyklus

Příklad. Určete nejkratší vzdálenost mezi vrcholy s a t v grafu:



Pozorování. Graf obsahuje cyklus záporné délky (vrcholy e, f, g), nejkratší vzdálenost mezi s a t není definována.

Poznámka. Uvažme graf bez cyklů záporné délky. Každá nejkratší cesta mezi dvěma vrcholy obsahuje libovolný vrchol nejvýše jednou.

Bellman-Fordův algoritmus

Pozorování. Z předchozí poznámky vyplývá, že nejkratší cesta mezi dvěma vrcholy v grafu obsahuje nejvýše $|V| - 1$ hran.

Relaxace hrany. Necht' (u, v) je hrana v grafu G s ohodnocením $w_e(u, v)$ a hodnoty $u.d$ a $v.d$ jsou v daném okamžiku nejkratší nalezené vzdálenosti do u , resp. do v , z výchozího vrcholu. Zjevně pak platí, že:

$$v.d = \min(v.d, u.d + w_e(u, v))$$

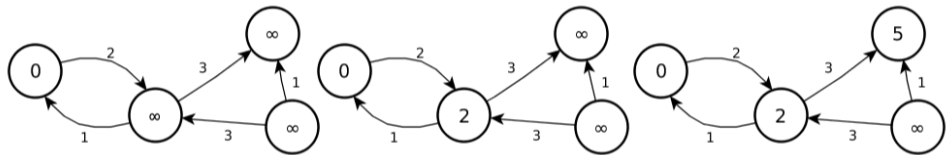
Tato (případná) změna ohodnocení $v.d$ se nazývá relaxací.

Bellman-Fordův algoritmus je založen na těchto dvou principech.

- počítá nejkratší vzdálenosti z výchozího vrcholu do všech ostatních (1:N)
- $(|V| - 1)$ krát relaxuje všechny hrany

Bellman-Fordův algoritmus – poznámky

Složitost Bellman-Fordova algoritmu je $O(|V| \cdot |E|)$, relaxace hrany má totiž zřejmě konstantní složitost.



Pozorování

- Pokud při některé z iterací nedojde ke změně hodnoty $v.d$ pro žádný vrchol v , pak je možné výpočet ukončit.
- Provedením jedné iterace výpočtu navíc lze v grafu **detekovat záporné cykly**.
- Pokud dojde k relaxaci hrany, lze u koncového vrcholu nastavit ukazatel na jeho předchůdce → rekonstrukce cesty.

Bellman-Fordův algoritmus – pseudokód

```
1: function Bellman-Ford( $G = (V, E, w_e)$ ,  $s$ ) is
2:    $\forall v \in V : v.d \leftarrow \infty$ ;  $s.d \leftarrow 0$ 
3:   for  $i \leftarrow 1$  to  $|V| - 1$  do
4:     for all  $(u, v) \in E$  do
5:       if  $v.d > u.d + w_e(u, v)$  then
6:          $v.d \leftarrow u.d + w_e(u, v)$ 
7:       fi
8:     done
9:   done
10:  for all  $(u, v) \in E$  do
11:    if  $v.d > u.d + w_e(u, v)$  then
12:      Error : Negative cycle detected
13:    fi
14:  done
15: end
```

Dijkstrův algoritmus

Dijkstrův algoritmus představuje odlišný způsob řešení problému nejkratších vzdáleností v grafu.

- Opět řeší problém typu 1:N.
- Vyžaduje graf s nezáporným ohodnocením všech hran.

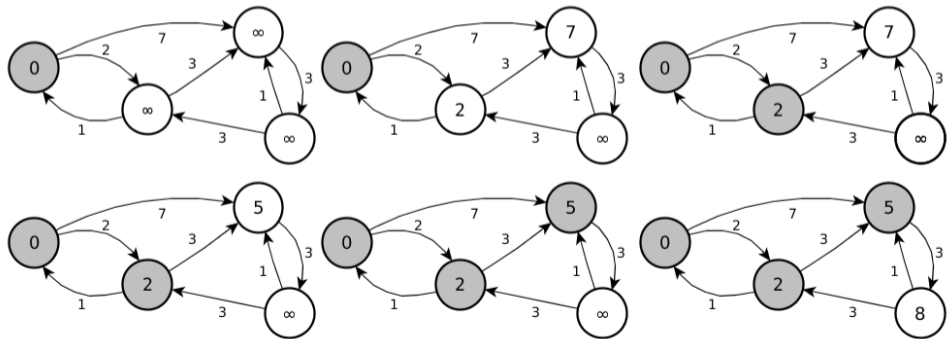
Myšlenka. Pokud je posloupnost u, u_1, \dots, u_n, v nejkratší cesta z u do v , pak posloupnost u, u_1, \dots, u_k , kde $k \leq n$ je nejkratší cesta z u do u_k .

Výpočet algoritmu. V každé iteraci rozšiřujeme množinu vrcholů, do kterých již známe nejkratší vzdálenost z výchozího.

Dijkstrův algoritmus

Příklad

1. Pokud je Q množina vrcholů s dosud neurčenou nejkratší vzdáleností, tak z ní nejprve vybereme vrchol u , jehož ohodnocení $u.d$ je nejnižší.
2. Poté přepočítáme všechny vzdálenosti do vrcholů z Q , do kterých vede z u hrana.



Dijkstrův algoritmus – pseudokůd

```
1: function Dijkstra( $G = (V, E, w_e)$ ,  $s$ ) is
2:    $\forall v \in V : v.d \leftarrow \infty$ 
3:    $s.d \leftarrow 0$ 
4:    $Q \leftarrow V$ 
5:   while  $Q$  není prázdná do
6:      $u \leftarrow t \in Q$  s minimální  $t.d$ 
7:     Odstraň  $u$  z  $Q$ 
8:     for all  $v : (u, v) \in E$  do
9:       if  $v.d > u.d + w_e(u, v)$  then
10:         $v.d \leftarrow u.d + w_e(u, v)$ 
11:      fi
12:    done
13:  done
14: end
```

Dijkstra – volba datové struktury

Složitost Dijkstrova algoritmu je dána volbou datové struktury pro Q . Zajímají nás dvě operace:

- f_{ext} – extrakce prvku s minimálním klíčem ($|V|$ operací)
- f_{dec} – snížení klíče $v.d$ (nejvýše $|E|$ operací)

Seznam vrcholů

- snížení klíče – $O(1)$
- extrakce minimálního prvku – $O(|V|)$
- celkem $O(|E| + |V|^2) = O(|V|^2)$

Binární halda

- snížení klíče i extrakce minima – $O(\log |V|)$
- celkem $O(\log |V| \cdot (|V| + |E|))$

Nejkratší vzdálenosti mezi všemi dvojicemi vrcholů

Pozorování. Určit nejkratší vzdálenost mezi dvěma vrcholy (1:1) má stejnou složitost jako určit nejkratší vzdálenost z jednoho vrcholu do všech ostatních (1:N).

Nejkratší mezi všemi dvojicemi vrcholů lze spočítat např. využitím $|V|$ volání Dijkstrova nebo Bellman-Fordova algoritmu, kdy v každém výpočtu volíme jiný výchozí vrchol. Jde to i lépe?

Floyd-Warshallův algoritmus počítá nejkratší vzdálenosti mezi všemi dvojicemi vrcholů v čase $O(|V|^3)$. Navíc oproti Dijkstrovu algoritmu umí pracovat se zápornými hranami.

Floyd-Warshallův algoritmus

Myšlenka. Označme $d_{i,j}^{(k)}$ délku nejkratší cesty mezi vrcholy i a j , kde na této cestě jsou vrcholy pouze z množiny $\{1, \dots, k\}$. Zjevně $d_{i,j}^{(0)} = w_e(i, j)$ a požadovaný výsledek odpovídá $d_{i,j}^{(|V|)}$.

Mohou nastat dvě možnosti pro $d_{i,j}^{(k)}$:

1. k není součástí nejkratší cesty $\rightarrow d_{i,j}^{(k)} = d_{i,j}^{(k-1)}$
2. k je součástí nejkratší cesty $\rightarrow d_{i,j}^{(k)} = d_{i,k}^{(k-1)} + d_{k,j}^{(k-1)}$

Odtud tedy:

$$d_{i,j}^{(k)} = \min \left\{ d_{i,j}^{(k-1)}, d_{i,k}^{(k-1)} + d_{k,j}^{(k-1)} \right\}$$

Poznámka. Pokud $d_{i,i}^{(|V|)} < 0$ pro nějaké i , pak graf obsahuje cyklus záporné délky.

Floyd-Warshallův algoritmus – pseudokód

```
1: function Floyd-Warshall( $G = (V, E, w_e)$ ) is
2:    $\forall (u, v) \in \{1, \dots, |V|\} \times \{1, \dots, |V|\} : dist(u, v) \leftarrow \infty$ 
3:    $\forall v \in V : dist(v, v) \leftarrow 0$ 
4:    $\forall (u, v) \in E : dist(u, v) \leftarrow w_e(u, v)$ 
5:   for  $k \leftarrow 1$  to  $|V|$  do
6:     for  $i \leftarrow 1$  to  $|V|$  do
7:       for  $j \leftarrow 1$  to  $|V|$  do
8:         if  $dist(i, j) > dist(i, k) + dist(k, j)$  then
9:            $dist(i, j) \leftarrow dist(i, k) + dist(k, j)$ 
10:        fi
11:      done
12:    done
13:  done
14: end
```