Taylor
E 3011

Jan Böhm

RECETOX

March 14, 2023

Co nás dnes čeká

1. e
2. π
3. Goniometrické funkce
4. Logaritmus funkce
5. 🍕

Přibližně e

e

Vytvořte funkci `e(tol = 0.001)`, která *vrací* hodnotu e s přesností danou parametrem `tol`.
Pro výpočet přibližné hodnoty e využijte formuli

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

která je odvozena z Taylorova rozvoje funkce e^x.
Sumu nepočítejte do nekonečna ale jen do té doby, kdy je přírůstek nového člene větší, než `tol`, symbolicky

$$e_{\texttt{tol}} = \sum_{k \in K} \frac{1}{k!}$$

$$K = \{\kappa \in \mathbb{N}_0 \text{ takových, že } \frac{1}{\kappa!} \geq \texttt{tol}\}$$

Co nás dnes čeká

Přibližně π

π

Vytvořte funkci `pi(tol = 0.001)`, která *vrací* hodnotu π s přesností danou parametrem `tol`.
Pro výpočet přibližné hodnoty e využijte Leibnizovu formuli

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

která je odvozena z Taylorova rozvoje funkce $\arctan$.
Sumu nepočítejte do nekonečna ale jen do té doby, kdy je přírůstek nového člene větší, než `tol`.

Co nás dnes čeká

1. e
2. π
3. Goniometrické funkce
4. Logaritmus funkce
5. 🍕

Přibližně $\sin$

$\sin(x)$

Vytvořte funkci `sin(x, tol = 0.001)`, která *vrací* hodnotu $\sin(x)$ s přesností danou parametrem `tol`.
Pro výpočet přibližné hodnoty $\sin(x)$ využijte Taylorův rozvoj této funkce v okolí nuly:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{(2k+1)}.$$

Tato aproximace je vhodná pro $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$. Pro hodnoty mimo tento interval využijte identity $\sin(x) = \sin(x \bmod 2\pi)$.
Sumu nepočítejte do nekonečna ale jen do té doby, kdy je přírůstek nového člene větší, než `tol`.

Co nás dnes čeká

Přibližně $\ln$

$\ln(x)$

Vytvořte funkci `ln(x, tol = 0.001)`, která *vrací* hodnotu $\ln(x)$ s přesností danou parametrem `tol`.
Pro výpočet přibližné hodnoty $\ln(x)$ využijte Taylorův rozvoj této funkce v okolí 1:

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k.$$

Pozor, tato aproximace konverguje jen pro $x \in (0, 2\rangle$. Proto budete pro $x > 2$ potřebovat identitu $\ln(x) = -\ln(\frac{1}{x})$.
Sumu nepočítejte do nekonečna ale jen do té doby, kdy je přírůstek nového člene větší, než `tol`.
Nakonec vytvořte funkci `log(x, base = 2, tol = 10**-6)`, která počítá logaritmus čísla `x` ve zvolené bázi `base`. Stačí využít identity

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

Co nás dnes čeká

1. e
2. π
3. Goniometrické funkce
4. Logaritmus funkce
5. 🍕

Takeaways

Po tomto cvičení byste měli mít připravené funkce

- `e(tol = 0.001)` a `pi(tol = 0.001)`, které vrací uvedené konstanty
- `sin(x, tol = 0.001)`, `ln(x, tol = 0.001` a `log(x, base = 2, tol = 0.001`, které počítají funkční hodnoty sinu, přirozeného logaritmu resp. logaritmu se zvolenou bází

Tyto funkce si přidejte do své "knihovny" `functions.py`.
Po tomto cvičení byste měli umět:

- Vyrobit další funkce postavené na (Taylorovu) polynomu, např. zbytek goniometrických funkcí, exponenciální funkci nebo např. hyperbolické funkce.
- Zjistit, kolik iterací uvnitř funkce proběhlo, než došlo k požadovanému výsledku (např. porovnejte počet iterací `e(tol = 10**-6)` a `pi(tol = 10**-6)`.
- Rozumět limitům a problémům funkcí, které jste nachystali. Jak jsou přesné, rychlé, kdy selžou?