První cvičení z Elektrodynamiky

Na úvod připomeneme matematiku, kterou během celého kurzu budeme používat. Základem pro nás budou tensory. A základním pojmem pro vybudování tensorů je vektorový prostor V. Omezíme se na vektorové prostory konečné dimenze $n \in \mathbb{N}$. Budeme využívat izomorfismus $V \cong \mathbb{R}^n$, kde každému abstraktnímu vektoru z vektorového prostoru V přiřadíme n-tici reálných čísel. Tohoto lze dosáhnout zvolením báze $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ v $\mathbb{R}^n$ (báze může být bez újmy na obecnosti ortonormální báze) a přiřazení probíhá pomocí relace

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i,$$

kde implicitně používáme Einsteinovo sčítací pravidlo (stejné indexy do kříže značí sumaci). Čísla $v^i \in \mathbb{R}^n$ se nazývají souřadnice vektoru v vůči bázi $\{\vec{e}_i\}$. Často budeme nepřesně o souřadnicích vektoru mluvit jako vektoru. Dále můžeme zavést duální vektorový prostor V^* pomocí lineárních funkcí jako množinu

$$V^* = \{f \colon V \to \mathbb{R} \bigm| f \text{ je lineární}\}.$$

V tomto prostoru zvolíme speciální bázi $\{f^j\}_{j=1}^n$, pro kterou platí

$$f^j(\vec{e}_i) = \delta_i^j,$$

kde δ_i^j je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Prvky vektorové prostoru V^* budeme nazývat formy nebo kovektory a můžeme psát

$$\omega = \omega_i f^i.$$

Poloha indexů u souřadnic není náhodná a budeme se jí snažit držet, tj. že souřadnice vektorů mají index nahoře a souřadnice forem index dole.

Tyto dva různé vektorové prostory již stačí k definici tensorů. Tensor řádu (nebo typu) (p, q) je multilineární zobrazení

$$T \colon \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q} \to \mathbb{R}.$$

Termín multilineární znamená, že zobrazení je lineární v každé složce. Číslo p udává počet kontravariantních indexů a číslo q udává počet kovariantních indexů. Pomocí této definice můžeme dedukovat, že vektory jsou tensory typu $(1, 0)$ a naopak formy jsou tensory typu $(0, 1)$. Obecný tensor typu p, q můžeme psát jako

$$T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \vec{e}_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q},$$

kde $\otimes$ je tensorový součin, který nás (naštěstí) moc zajímat v tomto kurzu nebude. Budeme totiž hlavně pracovat s souřadnicemi tensorů $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$. Konkrétně nás teď budou zajímat dva konkrétní tensory: metrika a úplně antisymetrický tensor. Metrika g je symetrický, pozitivní, nedegenerovaný tensor

$$g \colon V \times V \to \mathbb{R}.$$

Souřadnicový zápis je

$$g = g_{ij} f^i \odot f^j$$[1].

To, že je tento tensor symetrický znamená

$$g_{ij} = g_{ji},$$

tj. záměna indexů nezmění znaménko. Díky tomuto je metrika často reprezentovaná pomocí symetrické matice. Úplně antisymetrický tensor třetího řádu (neboli epsilon tensor nebo Levi-Civitovův symbol) je tensor

$$\epsilon : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

Zde je potřeba, aby definice obsahovala tři kopie prostoru $\mathbb{R}^3$, aby tensor mohl být úplně antisymetrický (v kurzu dál potkáme úplně antisymetrický tensor 4. řádu, který by vyžadoval 4 kopie prostoru $\mathbb{R}^4$). V souřadnicích můžeme psát

$$\epsilon = \epsilon_{ijk} f^i \wedge f^j \wedge f^k$$[2].

To, že je tensor úplně antisymetrický znamená, že

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{kji} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{ikj}, \tag{1}$$

tj. každá výměna dvou sousedních indexů změní znaménko. Z této vlastnosti vyplývá například, že

$$\epsilon_{112} = 0,$$

tj. pokud má tensor dva stejné indexy, poté je nula. Budeme používat epsilon tensory, pro které platí

$$\epsilon_{123} = 1. \tag{2}$$

A teď otázka, k čemu to vůbec je? Nejprve se podívejme na epsilon tensor. Uvažme dva vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ a spočtěme následující kontrakci s epsilon tensorem $\epsilon_{1ij} v^i w^j$, kde jsme zafixovaly první index na hodnotě 1. Počítejme

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1ij} v^i w^j &= \epsilon_{111} v^1 w^1 + \epsilon_{112} v^1 w^2 + \epsilon_{113} v^1 w^3 + \epsilon_{121} v^2 w^1 + \epsilon_{122} v^2 w^2 + \epsilon_{123} v^2 w^3 + \epsilon_{131} v^3 w^1 + \\
&\quad + \epsilon_{132} v^3 w^2 + \epsilon_{133} v^3 w^3 = \\
&= \epsilon_{123} v^2 w^3 + \epsilon_{132} v^3 w^2 = v^2 w^3 - v^3 w^2,
\end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že epsilon tensor s dvěma stejnými indexy je nula a dále jsme použili (1) a (2). Výsledek, co jsme získali, možná poznáváte. Je to první složka vektorového součinu $\vec{v} \times \vec{w}$. Podobně můžeme získat zbylé dvě složky tohoto vektorového součinu. Celkově získáme

$$[\vec{v} \times \vec{w}]_i = \epsilon_{ijk} v^j w^k.$$

Pomocí epsilon tensoru tedy můžeme spočítat souřadnice vektorového součinu dvou vektorů.

Dále pojďme rozebrat metriku. Zde poznamenejme, že metrika zadává isomorfismus mezi prostory V a V^*. Pro nás to znamená, že souřadnice metriky (a inverzní metriky) slouží ke zvedání a spouštění indexů, tj. platí

$$v_i = g_{ij} v^j, \qquad w^j = g^{ji} w_i,$$

[1]Zde definujeme $f^1 \odot f^2 = \frac{1}{2}\left(f^1 \otimes f^2 + f^2 \otimes f^1\right)$.
[2]Zde definujeme $f^1 \wedge f^2 = \frac{1}{2}\left(f^1 \otimes f^2 - f^2 \otimes f^1\right)$.

kde je g^{ji} inverzní metrika, která splňuje

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k.$$

Slovy, pokud budeme metriku brát jako symetrickou matici, inverzní metrika je inverzí této matice. Z vlastnosti spouštění indexu vyplývá další využití metriky. Určitě víte, že skalární součin dvou vektorů se počítá následovně

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w^i.$$

Z tohoto souřadnicového zápisu ale nejde vidět, že oba tensory jsou vektory, jelikož vektor $\vec{v}$ má index dole, tj. jedná se spíše o formu. Ale pokud využijeme metriky pro spuštění indexu, můžeme psát

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w^j = v^j g_{ji} w^i.$$

Zde již vidíme, že oba objekty jsou opravdu vektory a skalární součin je zprostředkovaný pomocí metriky. Tudíž závěrem můžeme říct, že epsilon tensor se používá při vektorovém součinu a metrika při skalárním součinu.

A teď něco úplně jiného. Přejdeme k funkcionální (možná spíše spektrální) analýze. Budou nás zajímat pojmy delta funkce a Fourierova transformace. Začněme motivací: existuje něco jako spojitá analogie ke Kroneckerově deltě? Abychom na tuto řečnickou otázku odpověděli, uvažme nejprve vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, do kterého jsme zaznamenali n diskrétních dat, například velikost elektrického proudu v závislosti na čase. Pokud nás bude zajímat jen jedna konkrétní hodnota, třeba hodnota i, můžeme ji přímo z vektoru zkonstruovat pomocí formy f^i. V matematickém zápisu provedeme následující výpočet

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} v^j \vec{e}_j \quad / f^i,$$

$$\sum_{j=1} f^i(v^j \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} v^j f^i(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} v^j \delta_j^i = v^i. \tag{3}$$

Ve výpočtu schválně necháváme sumy, i když bychom mohli počítat s Einsteinovým sčítacím pravidlem. Pojďme teď vysvětlit, co myslíme spojitou analogií Kroneckerova delta. Uvažme, že v předchozí situaci nemáme vektor diskrétních hodnot, ale spojitou funkci hodnot $f(x)$. A nebude nás zajímat i-tá složka vektoru, ale hodnota funkce f v bodě x_0. Přepišme modrou rovnici v (3) do tohoto případu a získáme

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x - x_0)\,\mathrm{d}x = f(x_0). \tag{4}$$

Suma ve spojitém případě přešla na integrál, hledaná i-tá složka vektoru $\vec{v}$ přešla na hledanou funkční hodnotu v bodě x_0, samotný vektor přešel na funkci f. Otázkou je, na co přešla Kroneckerova delta? Co je $\delta(x - x_0)$ za objekt? Poznamenejme, že argument $x - x_0$ jen hlídá body, ve kterých probíhá výpočet, stejně jako Kronckerova delta hlídá indexy, které jsou ve výsledku stejné.

Abychom zjistili, co vůbec $\delta(x - x_0)$ je, budeme potřebovat komplexní Fourierovu řadu pro funkci $f(x)$, tj.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}, \tag{5}$$

kde $c_n \in \mathbb{C}$ a platí $c_{-n} = \bar{c}_n$. Tyto koeficienty c_n můžeme získat vynásobením rovnice (5) výrazem $\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$, $m \in \mathbb{Z}$, a následnou integrací podle x, tj.

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(m-n)}\,\mathrm{d}x, \tag{6}$$

kde jsme již zaměnili sumaci a integraci. Vyřešíme integrál napravo. Funkce $\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$, kde $p \in \mathbb{Z}-\{0\}$, je periodické funkce s periodou 2π. Tudíž integrál přes interval 2π je nula. Pro nás to znamená, že integrál je vždy nula, jen pro případ $m = n$ získáme 2π (jelikož integrujeme konstantní funkci 1). Na pravé straně (6) tedy máme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n 2\pi \delta^n_m = 2\pi c_m.$$

A celkově jsme zjistili, že

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x.$$

Tímto jsme zjistili koeficienty ve Fourierově řadě (5).

Dále dosaďme tyto koeficienty do Fourierovy řady (5)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \int_0^{2\pi} f(y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y.$$

Dále předpokládejme, že funkce f, kterou rozvíjíme do řady není periodická. Což lze jinými slovy říct, že její perioda je nekonečno. Tímto získáme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y.$$

Nakonec ještě nahradíme sumu za integrál, tj. diskrétní sčítací index n nahradíme za integrační proměnnou k

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}k.$$

Nakonec jen vyměníme pořadí integrace, tj. použijeme Fubiniho větu

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(y-x)}}{2\pi}\,\mathrm{d}k \right] f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Srovnejme tento výsledek s (4). Vidíme, že náš neznámý objekt $\delta(x - x_0)$ přesně odpovídá výrazu v hranaté závorce, tj.

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\,\mathrm{d}k. \tag{7}$$

„Funkce“ nalevo se nazývá Diracova delta (funkce) a ve skutečnosti se o funkci nejedná, jak si ukážeme. Je to totiž tzv. distribuce neboli zobecněná funkce. Ale jelikož jsme fyzici a ne matematici, tak ji budeme nepřesně říkat funkce. Tímto jsme odvodili tzv. Fourierovskou reprezentaci delta funkce. Delta funkce má totiž mnoho reprezentací, v různých problémech se hodí použít jiné. Na konci poznámek najdete další dvě reprezentace, obě splňující (4). Mimochodem, během odvozování jsme kromě delta funkce odvodili i Fourierovu transformaci (FT), která je dána jako

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x$$

a inverzní Fourierovu transformaci (IFT)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}k.$$

Vlastně jsme místo Fourieorvy řady při odvozování mohli vzít jen IFT a dosadit ji do FT a získali bychom výsledek.

Pojďme se podívat blíže na naši reprezentaci delta funkce (7). Spočítáme proto následující integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)} \, \mathrm{d}k.$$

Nejprve zavedeme substituci $\xi = x - x_0$ a místo nekonečných mezí v integrálu zaveďme parametr K, který pošleme do nekonečna,

$$\lim_{K \to \infty} \int_{-K}^{K} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi} \, \mathrm{d}k.$$

Dále už snadno

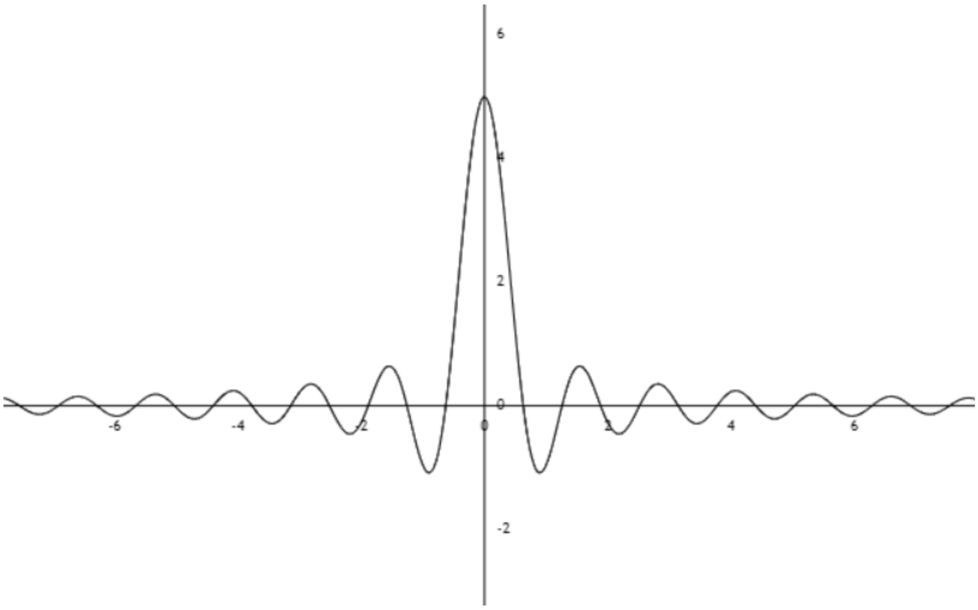
$$\lim_{K \to \infty} \int_{-K}^{K} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi} \, \mathrm{d}k = \lim_{K \to \infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}}{\mathrm{i}\xi} \right]_{-K}^{K} = \lim_{K \to \infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\xi}}{\mathrm{i}\xi} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\xi}}{\mathrm{i}\xi} \right] = 2 \lim_{K \to \infty} \frac{\sin(K\xi)}{\xi}.$$

Jedná se o sinus modulovaný lineární lomenou funkcí. Na Obrázcích 1 a 2 jsou grafy této funkce pro hodnoty $K = 5$ a $K = 15$. Vidíme, že se prostřední peak s rostoucím K zvětšuje a zužuje, graf „kmitá“ s větší frekvencí a toto „kmitání“ se rychleji utlumuje. Proto můžeme předpokládat, že v limitě $K \to \infty$ zbude pouze prostřední peak, který ale bude nekonečně vysoký. Což je přesně důvod, proč delta funkce není funkce. Žádná funkční hodnota u funkce není nekonečno. A taky z toho vidíme, proč má delta funkce víc reprezentací. Jde jen o to vhodně poskládat (a normovat) posloupnost funkcí tak, aby v limitě dala pouze nekonečný peak v bodě x_0. Jiná reprezentace je například pomocí posloupnosti gaußovek

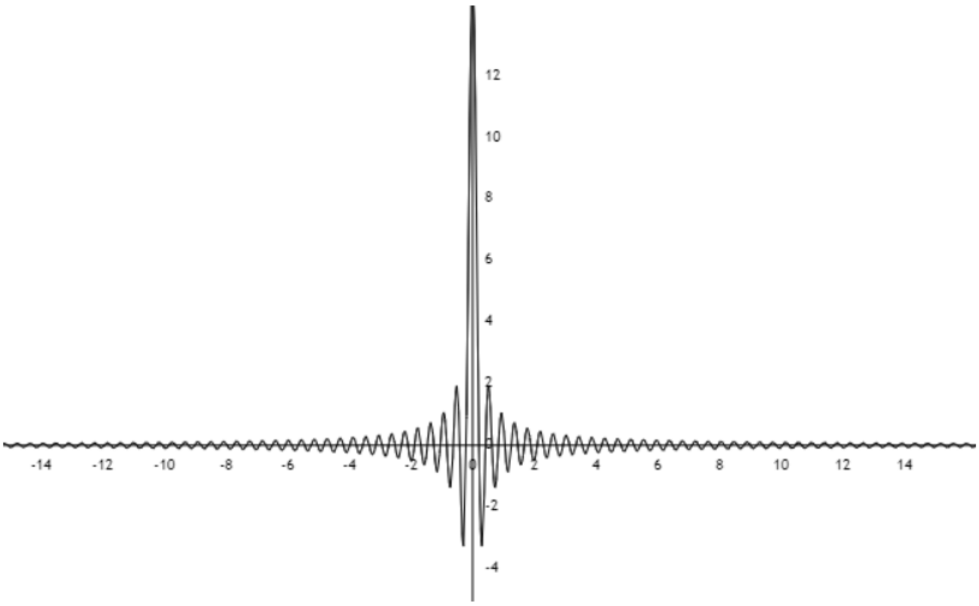
$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{\epsilon}},$$

nebo jen velmi názorná reprezentace, která vychází z podobnosti s Kroneckerovým delta

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & x = x_0, \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}$$



Obrázek 1: Graf pro hodnotu $K = 5$



Obrázek 2: Graf pro hodnotu $K = 15$