Čtvrté cvičení ze Speciální relativity

1. Ukažte, že pro prostorové indexy se kovariantní pohybová rovnice pro náboj v elektromagnetickém poli

$$mc\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} = eF_{\mu\nu}u^\nu$$

redukuje na klasickou pohybovou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right).$$

Na co se redukuje rovnice pro časový index? Fyzikálně interpretujte tuto rovnici.

Řešení: Nejprve upravme levou stranu kovariantní pohybové rovnice

$$mc\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} = mc\frac{\mathrm{d}u_\mu}{c\mathrm{d}t}\frac{c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}p_\mu}{c\mathrm{d}t}\gamma.$$

Využili jsme zde, že

$$\gamma = c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}.$$

Pojďme se podívat na prostorovou část, dosadíme za lorentzovský index μ pouze prostorový index i

$$-\frac{\mathrm{d}p_i}{c\mathrm{d}t}\gamma = eF_{i0}u^0 + eF_{ij}u^j.$$

Na levé straně jsme získali mínus kvůli tomu, že 4-hybnost má v kovariantní pohybové rovnici spodní index. Zaměřme se na pravou stranu. Nejprve F_{i0}. Jedná se o i-tý řádek, nultý sloupec v matici

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$F_{i0} = \left(-\frac{E_x}{c}, -\frac{E_y}{c}, -\frac{E_z}{c}\right) = -\frac{E_i}{c}.$$

Dále F_{ij} je submatice 3×3 v pravém dolním rohu. Tuto submatici můžeme napsat jako

$$F_{ij} = -\epsilon_{ij}{}^k B_k.$$

Takže pohybová rovnice pro prostorové směry je

$$-\frac{\mathrm{d}p_i}{c\mathrm{d}t}\gamma = -\frac{e}{c}E_i\gamma - e\epsilon_{ij}{}^k B_k\frac{v^j}{c}\gamma,$$

kde jsme dosadili již za časovou a prostorovou část 4-rychlosti u^ν. Tuto rovnici můžeme upravit na

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = eE_i + e\epsilon_{ij}{}^k B_k v^j,$$

nebo ve vektorovém zápisu

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right).$$

Jedná se o pohybovou rovnici částice v elektromagnetickém poli. I když vypadá stejně jako klasická pohybová rovnice, nesmí se zapomenou, že hybnost v rovnici je relativistická, tj.

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v}.$$

Nakonec ukažme, jakou rovnici nám dá nultá složka kovariantní pohybové rovnice, tj. za index μ dosaďme 0. Získáme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{c\mathrm{d}t}\gamma = eF_{0i}u^i.$$

Složka F_{00} je nulová, proto ji v sumě vynecháváme. F_{0i} znamená nultý řádek, i-tý sloupec v matici $F_{\mu\nu}$, to nám dává

$$F_{0i} = \frac{E_i}{c}.$$

Dosadíme nultou složku 4-hybnosti $p_0 = \frac{\mathcal{E}}{c}$ a prostorovou část 4-rychlosti $u^i = \gamma\frac{v^i}{c}$ a získáme

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}\gamma = e\frac{E_i}{c}\frac{v^i}{c}\gamma.$$

Rovnici trochu upravíme a dostaneme závěrečný tvar

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = e\vec{E}\cdot\vec{v}.$$

Tato rovnice nám říká, že energie částice, pohybující se v elektromagnetickém poli, se může měnit pouze díky elektrickému poli. Formulováno jinak: magnetické pole nekoná práci.

2. Určete trajektorii, po které se pohybuje relativistická částice s nábojem e a hmotností m v uniformním konstantním elektrickém poli $\vec{E} = (E, 0, 0)$. (Uvažte pouze pohyb v rovině xy.) Ukažte, že pro limitu $c \to \infty$ obdržíme klasickou parabolickou trajektorii.

   Řešení: Jelikož je magnetické pole nulové, pohybová rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = e\vec{E}.$$

Jelikož nás zajímá pouze pohyb v rovině xy, vynecháme z-ovou složku. Máme tedy soustavu dvou rovnic

$$\dot{p}_x = eE,$$
$$\dot{p}_y = 0.$$

První integrace je jednoduchá

$$p_x = eEt + C,$$
$$p_y = p_0,$$

kde $C, p_0 \in \mathbb{R}$ jsou integrační konstanty. Pro jednoduchou položíme $C = 0$. Druhá integrace již jednoduchá není, jelikož

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

tudíž se rychlost $\vec{v}$ objevuje na dvou místech. Proto půjdeme na řešení chytřeji. Známe vztah pro relativistou energii

$$\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4.$$

V našem případě je relativistická energie

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2},$$

kde jsme si označili $\mathcal{E}_0^2 = m^2c^4 + p_0^2c^2$, jelikož je to konstanta. Ze 4-hybnosti

$$\left(mc\gamma, m\gamma v^i\right) = mcu^\mu = p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, p^i\right),$$

zjistíme, že

$$\begin{aligned} p^i &= v^i\gamma m, \\ \frac{\mathcal{E}}{c} &= \gamma mc. \end{aligned}$$

Vyjádřením γ z druhé rovnice a dosazením do první dostaneme

$$v^i = \frac{p^ic^2}{\mathcal{E}}.$$

Tuto rovnici teď budeme integrovat. Pro první složku dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x = \frac{p_xc^2}{\mathcal{E}} = \frac{eEtc^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + c^2e^2E^2t^2}}.$$

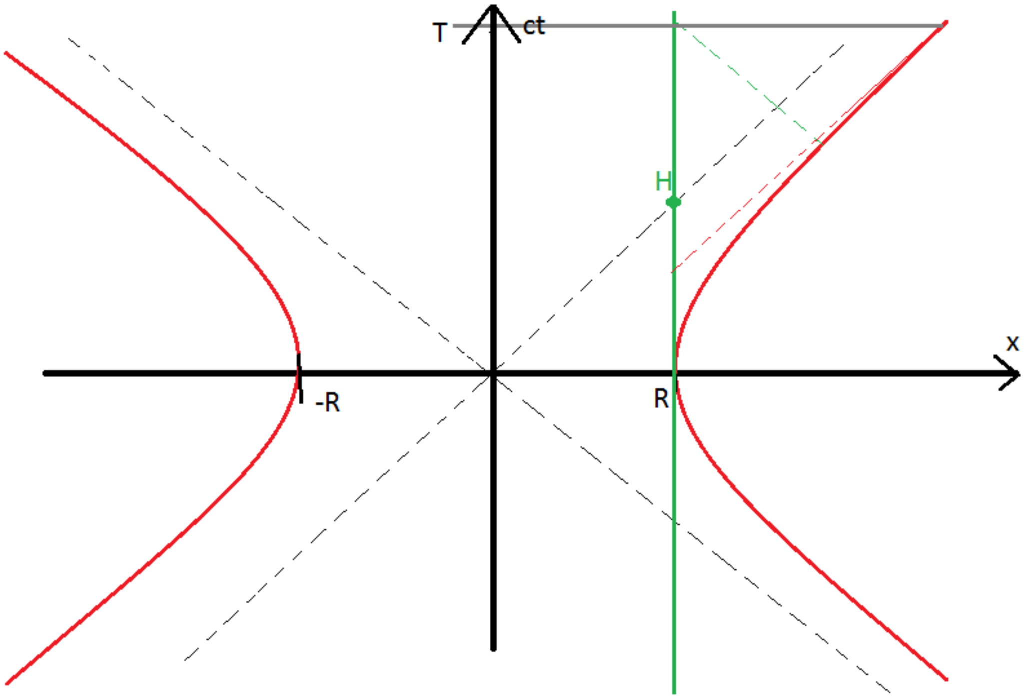
Zintegrujeme

$$\begin{aligned} x = \int \frac{eEtc^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + c^2e^2E^2t^2}}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} \mathcal{E}_0^2 + c^2e^2E^2t^2 = \alpha \\ 2c^2e^2E^2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}\alpha \end{array} \right| = \frac{1}{2eE}\int \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{d}\alpha = \frac{\sqrt{\alpha}}{eE} + C = \\ = \frac{1}{eE}\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + c^2e^2E^2t^2}, \end{aligned}$$

kde jsme integrační konstantu $C \in \mathbb{R}$ zanedbali, jelikož se jedná jen o volbu počátku. U tohoto výsledku se na chvíli zastavme. Částice totiž letí ve směru x s nenulovým zrychlením. Což je situace, kterou by speciální relativita neměla umět popsat. Ale v tomto jednoduchém případě to dovede. Předchozí výsledek umocníme na druhou a upravíme na

$$x^2 - (ct)^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{e^2E^2},$$

takže světočára v rovině ctx odpovídá hyperbole, která na ose x prochází bodem $\frac{\mathcal{E}_0}{eE} =: R$ (samozřejmě se částice pohybuje jen po jedné větvi hyperboly), viz Obrázek 1. Nechť



Obrázek 1: Prostoročasový diagram pro urychleného pozorovatele

se naše částice pohybuje po pravé větvi hyperboly. Asymptoty hyperboly jsou osami kvadrantů, takže jsou to trajektorie fotonů, které by vyletěly z počátku vztažné soustavy. Dál uvažme zeleného pozorovatele, který s naší částici potká v bodě

$$R_{ct,x} = \left(0, \frac{\mathcal{E}_0}{eE}\right).$$

Pozorovatel se bude vzhledem ke vztažné soustavě pohybovat nulovou rychlostí, proto je jeho světočára vertikální přímka. Dále nás bude zajímat situace v čase T. Částice v čase T vidí zeleného pozorovatele, jak je znázorněno na obrázku. Ale v dalších čase se zelený pozorovatel pro částice bude čím dál tím víc zpomalovat, jen pomalu se bude blížit k bodu H. To je dáno tím, že trajektorie částice má světelný paprsek vycházející z počátku souřadné soustavy jako asymptotu. Tento světelný paprsek určuje to, co částice uvidí v nekonečnu. Pro částici se proto prostoročas rozdělí na dvě části. Část pod asymptotou je část prostoročasu, kterou částice může vidět a může částici kauzálně ovlivnit. A část prostoročasu nad asymptotou částice nikdy neuvidí. Vznikne tzv. horizont událostí, v našem případě přímka, která rozděluje prostoročas na dvě části. Pro částici se tedy zelený pozorovatel bude pomalu přibližovat bodu H a v nekonečnu se do něj dostane. Ale co se děje se zeleným pozorovatel? Tomu je úplně jedno, že se částice od něj vzdaluje s nenulovým zrychlením. Horizont událostí, respektive bod H, jsou pro něj obyčejné body časoprostoru. V čase T, který odpovídá jeho poloze za horizontem událostí, uvidí normálně částici. V dalších časech vidí, jak se od něj částice se zrychlením vzdaluje. Je zřejmé, že vztažné soustavy spojené s částicí a zeleným pozorovatel nejsou ekvivalentní, jelikož vztažná soustava spojená s částicí dokáže popsat pouze část prostoročasu. Toto je ale v rozporu s jedním axiomů speciální, a to tím, že všechny vztažné soustavy jsou ekvivalentní, že můžeme použít libovolnou vztažnou soustavu k popisu prostoročasu.

Vraťme se ale k příkladu. Zbývá nám vyřešit rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + c^2 e^2 E^2 t^2}}.$$

Integrace je znovu jednoduchá

$$y = \int \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + c^2 e^2 E^2 t^2}} \mathrm{d}t = \int \frac{p_0 c^2}{\mathcal{E}_0 \sqrt{1 + \frac{(ceEt)^2}{\mathcal{E}_0^2}}} \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0} = \sinh \alpha \\ \frac{ceE}{\mathcal{E}_0} \mathrm{d}t = \cosh \alpha \mathrm{d}\alpha \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{p_0 c^2 \cosh \alpha \mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0 \sqrt{1 + \sinh^2 \alpha}} \mathrm{d}\alpha = \frac{p_0 c}{eE} \int \mathrm{d}\alpha = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{arcsinh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0},$$

kde opět položíme integrační konstantu rovnu nule. Prozkoumejme nerelativistickou limitu $c \to \infty$. Nejprve energie $\mathcal{E}_0$ přejde na klidovou energii

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2 c^4 + p_0^2 c^2} \overset{c \to \infty}{\to} \mathcal{E}_0 = mc^2.$$

Druhý člen v odmocnině jsme zanedbali, jelikož má nižší mocninu u c. Dále využijeme i Taylorův rozvoj do první řádu funkce $\operatorname{arcsinh} x \approx x$, jelikož po dosazení klidové energie do argumentu zůstane faktor c ve jmenovateli. Dohromady pro $c \to \infty$ je souřadnice y rovna

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{arsinh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0} \overset{c \to \infty}{\to} y = \frac{p_0 c}{eE} \frac{eEt}{mc} = \frac{p_0}{m} t.$$

Vidíme, že nerelativistická limita vyšla jako rovnoměrný pohyb ve směru y, což je správně, jelikož elektrické pole urychluje částici pouze ve směru x.

Abychom zjistili, jak vypadá trajektorie v rovině xy, vyjádříme si ze souřadnice y čas t a dosadíme do souřadnice x, tedy

$$\begin{aligned}
t &= \frac{\mathcal{E}_0}{ceE} \sinh \frac{eEy}{p_0 c}, \\
x &= \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + c^2 e^2 E^2 \frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2 e^2 E^2} \sinh^2 \frac{eEy}{p_0 c}}, \\
x &= \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{eEy}{p_0 c}}, \\
x &= \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cosh \frac{eEy}{p_0 c}.
\end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že trajektorie relativistické částice v uniformním konstantním elektrickém poli je řetězovka. Na závěr opět ověříme nerelativistickou limitu $c \to \infty$. Využijeme zase tvar klidové energie $\mathcal{E}_0$ a rozvoj $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$ a dostaneme

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cosh \frac{eEy}{p_0 c} \overset{c \to \infty}{\to} x = \frac{mc^2}{eE} \left(1 + \frac{e^2 E^2 y^2}{2 p_0^2 c^2} \right) = \frac{eEm}{2 p_0^2} y^2 + \text{const.}$$

Výsledkem je parabolická trajektorie, která se dá zjistit řešením nerelativistické pohybové rovnice.