Šesté cvičení ze Speciální relativity

1. Pro čísla $p = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ukažte, že platí

$$\star\star T = (-1)^{p-1} T,$$

kde T je antisymetrický tensor p-tého řádu a $\star T$ značí jeho Hodgeho duál.

Řešení: Nejprve zaveďme Hodgeho hvězdičku $\star$. Nechť V je vektorový prostor dimenze n, V^* značí duální vektorový prostor a $\Lambda^k V^*$ značí množinu k-forem nad vektorovým prostorem V^*. Připomeňme, že k-formy jsou antisymetrické tensory řádu k. Hodgeho hvězdička $\star$ je zobrazení

$$\star \colon \Lambda^k V^* \to \Lambda^{n-k} V^*,$$

které funguje z důvodu, že

$$\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \dim \Lambda^{n-k} V^*.$$

Na jednotlivé tensory Hodgeho hvězdička působí následovně

$$\begin{aligned}
a \in \mathbb{R} \colon \; (\star a)^{\mu\nu\rho\sigma} &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a, \\
v \in V^* \colon \; (\star v)^{\mu\nu\rho} &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\sigma, \\
F \in \Lambda^2 V^* \colon \; (\star F)^{\mu\nu} &= \frac{1}{2!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \\
T \in \Lambda^3 V^* \colon \; (\star T)^{\mu} &= \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} T_{\nu\rho\sigma}, \\
P \in \Lambda^4 V^* \colon \star P &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{\mu\nu\rho\sigma}.
\end{aligned}$$

Vraťme se k samotnému příkladu a ověřme požadovanou identitu. Nejprve pro $p = 0$.

$$\begin{aligned}
p = 0 \colon \; (\star a)^{\mu\nu\rho\sigma} &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a, \\
\star\star a &= \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a = -24 \frac{1}{4!} a = -a,
\end{aligned}$$

kde jsme využili identitu z prvního příkladu. Jelikož $p = 0$, proto $(-1)^{p-1} = -1$ a identita je dokázána. Budeme pokračovat úplně stejně. Počítejme

$$\begin{aligned}
p = 1 \colon \; & (\star v)^{\mu\nu\rho} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\sigma, \\
& (\star\star v)_\mu = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\nu\rho\sigma\alpha} v_\alpha = -\frac{1}{6} \epsilon_{\nu\rho\sigma\mu} \epsilon^{\nu\rho\sigma\alpha} v_\alpha = \delta^\sigma_\mu v_\sigma = v_\mu, \\
p = 2 \colon \; & (\star F)^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \\
& (\star\star F)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -\frac{2}{4} \left(\delta^\rho_\alpha \delta^\sigma_\beta - \delta^\sigma_\alpha \delta^\rho_\beta \right) F_{\rho\sigma} = \\
& \qquad = -\frac{1}{2} \left(F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha} \right) = -F_{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnici použili $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$, což je antisymetrie k-forem. Pokračujme

$$
\begin{aligned}
p = 3\colon\ (\star T)^{\mu} &= \frac{1}{6}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T_{\nu\rho\sigma},\\
(\star\star T)_{\alpha\beta\gamma} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}\frac{1}{6}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T_{\nu\rho\sigma} = -\frac{1}{6}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T_{\nu\rho\sigma} =\\
&= \frac{1}{6}\left(\delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\gamma} + \delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\nu}_{\gamma} + \delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\nu}_{\gamma} - \delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\gamma}\right)T_{\nu\rho\sigma} =\\
&= \frac{1}{6}\left(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\gamma\alpha\beta} + T_{\beta\gamma\alpha} - T_{\gamma\beta\alpha} - T_{\alpha\gamma\beta} - T_{\beta\alpha\gamma}\right) = T_{\alpha\beta\gamma},
\end{aligned}
$$

kde jsme v posledním kroku opět využili antisymetrii. Případ $p = 4$ se řeší úplně stejně, jen je trochu zdlouhavý.

2. (†) Využitím Lorenzovy kalibrace ukažte, že elektromagnetické záření má dva stupně volnosti (které se interpretují jako polarizace).

   Řešení: Vyjdeme z nehomogenní Maxwellovy rovnice ve vakuu

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0.$$

Dosadíme do ní definici tensoru elektromagnetického pole pomocí 4-potenciálu

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial_{\mu}\partial^{\nu}A^{\mu} = 0.$$

Tuto rovnici můžeme vyřešit tak, že oba výrazy vynulujeme, tudíž

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} = 0,\\
&\partial_{\mu}\partial^{\nu}A^{\mu} = \partial^{\nu}\partial_{\mu}A^{\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{\mu}A^{\mu} = 0.
\end{aligned}
$$

První rovnice je vlnová rovnice pro 4-potenciál, druhá rovnice je Lorenzova kalibrace. Lorenzovu kalibraci můžeme vždy požadovat, jak jsme ukázali v jednom předchozím cvičení. Tyto dvě rovnice vyřešíme pomocí ansatzu

$$A^{\nu} = \varepsilon^{\nu}e^{\mathrm{i}k_{\lambda}x^{\lambda}},$$

kde ε^{ν} je číselný 4-vektor, který dává stupně volnosti řešení, a k_{λ} je vlnový 4-vektor. Tudíž zatím můžeme volit vektor ε^{ν} libovolně, proto máme 4 stupně volnosti. Dosaďme tento ansatz do vlnové rovnice

$$0 = \partial^{\mu}\partial_{\mu}A^{\nu} = \varepsilon^{\nu}\left(\mathrm{i}k_{\rho}\delta^{\rho}_{\mu}\right)\left(\mathrm{i}k^{\sigma}\delta^{\mu}_{\sigma}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\lambda}x^{\lambda}} = -\varepsilon^{\nu}k_{\mu}k^{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\lambda}x^{\lambda}}.$$

Tato rovnice může být splněna pomocí

$$k_{\mu}k^{\mu} = 0,$$

to znamená, že k_{μ} je světlupodobný 4-vektor. Standardní tvar vlnového 4-vektoru je

$$k^{\mu} = \left(\frac{\omega}{c}, k_1, k_2, k_3\right)^T$$

s tím, že platí

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0.$$

Pro náš případ zvolme světelnou vlna pohybující se pouze ve směru z. Tj. vlnový 4-vektor je

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, \frac{\omega}{c}\right)^T ,$$

aby byla splněna podmínka světlupodobnosti. Dosaďme ještě ansatz do Lorenzovy kalibrace

$$0 = \partial_\mu A^\mu = \mathrm{i}k_\sigma \delta^\sigma_\mu \varepsilon^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\lambda x^\lambda} = \mathrm{i}k_\mu \varepsilon^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\lambda x^\lambda}.$$

Tato rovnice může být splněna pomocí

$$k_\mu \varepsilon^\mu = 0. \tag{1}$$

Tato podmínka nám dává jednu omezující podmínku na číselný 4-vektor ε^ν, tudíž nám zbývají tři stupně volnosti. Vypišme je explicitně

$$\begin{aligned}
\varepsilon^\mu_{(1)} &= (0, 1, 0, 0)^T ,\\
\varepsilon^\mu_{(2)} &= (0, 0, 1, 0)^T ,\\
\varepsilon^\mu_{(3)} &= (1, 0, 0, 1)^T .
\end{aligned}$$

Ověřme, že poslední z těchto 4-vektorů splňuje podmínku (1)

$$k_\mu \varepsilon^\mu_{(3)} = k^\nu g_{\nu\mu} \varepsilon^\mu_{(3)} = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, -\frac{\omega}{c}\right) \cdot (1, 0, 0, 1)^T = 0.$$

Ale ještě i v rámci Lorenzovy kalibrace není 4-potenciál dán jednoznačně, můžeme k něco přičíst libovolné řešení homogenní vlnové rovnice. Ukažme proč. Změňme 4-potenciál A^μ na A'^μ pomocí libovolné funkce λ, tj.

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \lambda.$$

I po novém 4-potenciálu A'^μ budeme chtít, aby splňoval Lorenzovu kalibraci tj.

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \lambda = \partial_\mu \partial^\mu \lambda,$$

kde jsme použili, že 4-potenciál A^μ splňuje Lorenzovu kalibraci. Tudíž funkce λ opravdu splňuje homogenní vlnovou rovnici

$$\partial_\mu \partial^\mu \lambda = 0.$$

Tuto vlnovou rovnici vyřešme pomocí ansatzu

$$\lambda = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu x^\mu}.$$

Nový 4-potenciál A'^μ tedy je

$$A'^\mu = \varepsilon^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\nu x^\nu} + \mathrm{i}k^\mu B\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\nu x^\nu} = \left(\mathrm{i}k^\mu B + \varepsilon^\mu\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\nu x^\nu}.$$

Pokud zvolíme

$$B = \frac{\mathrm{i}c}{\omega}$$

a za číselný 4-vektor ε^μ zvolíme třetí 4-vektor z našeho seznamu $\varepsilon^\mu_{(3)}$ dostaneme

$$A'^\mu = \left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}c}{\omega}\left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, \frac{\omega}{c}\right) + (1, 0, 0, 1)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\nu x^\nu} = \Big((-1, 0, 0, -1) + (1, 0, 0, 1)\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\nu x^\nu} = 0,$$

tudíž číselný 4-vektor $\varepsilon^\mu_{(3)}$ nám dá triviální 4-potenciál. Zbývají nám tedy dva stupně volnosti $\varepsilon^\mu_{(1)}$ a $\varepsilon^\mu_{(2)}$. Tyto stupně volnosti se interpretují jako polarizace světelného vlnění.