Druhé cvičení z Elektrodynamiky

1. (†) Ukažte, že platí
$$g_{ij}\epsilon^{ijk} = g_{jk}\epsilon^{ijk} = g_{ik}\epsilon^{ijk} = 0,$$
kde g_{ij} jsou souřadnice metriky a ϵ^{ijk} souřadnice úplně antisymetrického tensoru 3. řádu (tzv. ϵ-tensoru). Dále ukažte, že pro úplně antisymetrický tensor 3. řádu platí
$$\text{a)}\ \epsilon^{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta^j_l\delta^k_m - \delta^j_m\delta^k_l,$$
$$\text{b)}\ \epsilon^{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta^k_l,$$
$$\text{c)}\ \epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} = 6.$$

Řešení: Nejprve dokažme, že
$$g_{ij}\epsilon^{ijk} = 0.$$
Toto jednoduše vyplývá ze symetrie metriky, antisymetrie epsilon tensoru a přepisování indexů. Počítejme
$$g_{ij}\epsilon^{ijk} = -g_{ij}\epsilon^{jik} = -g_{ji}\epsilon^{jik} = -g_{ij}\epsilon^{ijk}.$$
V první úpravě jsme využili antisymetrie epsilon tensoru, v druhé úpravě symetrii metriky a ve třetí jsme přepsali index i na index j a naopak (indexy, přes které se sčítá jsou pouze „značky“, které můžou mít libovolný název). V rovnosti převedeme vše na levou stranu
$$2g_{ij}\epsilon^{ijk} = 0$$
a tím jsme dokázali požadovanou rovnost. Zbylé dvě plynou automaticky.

Pokračujme důkazem rovnosti a). Tady je nutné si uvědomit, že epsilon s dvěma stejnými indexy je nula. Dále rozepišme rovnost
$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ilm} = \epsilon^{1jk}\epsilon_{1lm} + \epsilon^{2jk}\epsilon_{2lm} + \epsilon^{3jk}\epsilon_{3lm}.$$
Pokud je v prvním součinu nějaký volný index i, j, k, l rovný 1, pak je součin kvůli antisymetrie rovné 0. Podobně to platí druhý součin a index 2, apod. pro třetí. Dalším pozorováním je, že i indexy j a k musí nabývat jiných hodnot, aby výsledek nebyl nula. To samé platí i pro indexy l a m. Takže, pokud chceme dostat nenulový výsledek, musí nastat jeden ze dvou případů:

- buď je $j = l$ a pak pro nenulovost musí být $k = m$,
- nebo $j \neq l$ a pak pro nenulovost musí být $k \neq m$. Toto lze přepsat do formy $j = m$ a $k = l$.

Celá tato diskuze se dá reprezentovat pomocí Kroneckerových delt $\delta^j_l\delta^k_m$ a $\delta^j_m\delta^k_l$, protože to přesně vystihuje, kdy je kontrakce epsilon tensorů (ne)nulová, tj.
$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ilm} = a\delta^j_l\delta^k_m + b\delta^j_m\delta^k_l,$$
kde a, b symbolizují ještě neznámá znamínka, které teď budeme diskutovat. Nejprve pro znaménko a zvolme třeba $j = l = 1$, $k = m = 2$ a $i = 3$, které dává nenulový výsledek
$$\epsilon^{312}\epsilon_{312} = a\delta^1_1\delta^2_2,$$
$$1 \cdot 1 = a1 \cdot 1,$$
$$a = 1.$$

Pro znaménko b zvolme třeba $j = m = 3$, $k = l = 2$ a $i = 1$

$$\begin{aligned} \epsilon^{132}\epsilon_{123} &= b\delta^3_3\delta^2_2, \\ (-1)\cdot 1 &= b1 \cdot 1, \\ b &= -1. \end{aligned}$$

Celkově máme

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta^j_l\delta^k_m - \delta^j_m\delta^k_l,$$

což je rovnost, kterou jsme chtěli dokázat.

Pro důkaz identity b) použijeme teď dokázanou identitu a). Počítejme

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijl} = \delta^j_j\delta^k_l - \delta^j_l\delta^k_j = 3\delta^k_l - \delta^k_l = 2\delta^k_l.$$

V prvním součinu máme δ^j_j, což je (kvůli tomu, že používáme Einsteinovu sčítací notaci)

$$\delta^j_j = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

V druhém součinu jsme jen použili „pravidlo" při počítání s Kroneckerovými deltami „za j dej l a smaž sumaci".

Pro c) se zase využije výsledek z b) a jednoduše získáme

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta^k_k = 6.$$

2. (†) Pomocí indexové notace ukažte následující vektorovou identitu

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Řešení: Nejprve přepišme levou stranu zadání do indexové notace, pomocí $[\vec{a} \times \vec{b}]^i = \epsilon^i{}_{jk}a^jb^k$

$$\epsilon^l{}_{mi}a^m\epsilon^i{}_{jk}b^jc^k = \epsilon^{lmi}\epsilon_{ijk}a_mb^jc^k.$$

Při úpravě jsme využili toho, že při kontrakci indexů nezáleží na jejich poloze, protože

$$u^iv_i = u_jg^{ji}v_i = u_jv^j.$$

Abychom mohli použít vzorec z prvního příkladu, musíme dostat index i v prvním epsilon tensoru na první místo. Toho lze dosáhnout dvěma výměnami nejbližších indexů, tj. dvěma znamínky mínus, tedy se znaménko nemění

$$\epsilon^{lmi}\epsilon_{ijk}a_mb^jc^k = \epsilon^{ilm}\epsilon_{ijk}a_mb^jc^k.$$

Dál použijeme již zmíněny vzorec

$$\epsilon^{ilm}\epsilon_{ijk}a_mb^jc^k = \left(\delta^l_j\delta^m_k - \delta^l_k\delta^m_j\right)a_mb^jc^k = a_kb^lc^k - a_mb^mc^l.$$

Teď si stačí jen uvědomit, že kontrakce indexů pro vektory znamená skalární součin a získáme

$$a_kb^lc^k - a_mb^mc^l = \left[\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\right]^l,$$

což je hledaná pravá strana identity.

3. Pomocí indexové notace ukažte následující vektorové identity:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\, \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),\\ &\text{b)}\, (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}). \end{aligned}$$

Řešení: a) Nejprve si identitu přepišme do indexové notace

$$a^i\epsilon_{ijk}b^jc^k = b^i\epsilon_{ijk}c^ja^k = c^i\epsilon_{ijk}a^jb^k.$$

Teď v druhém a třetím výrazu změňme indexy tak, aby u souřadnic vektoru $\vec{a}$ byl index i, u souřadnic vektoru $\vec{b}$ index j a u souřadnic vektoru $\vec{c}$ index k (sčítací indexy jsou „značky“, jejíž názvy můžeme měnit, na rozdíl od volných indexů). U druhého výrazu to znamená výměnu indexů $i \to j \to k \to i$ a u třetího výrazu $j \to i \to k \to j$. Dostaneme

$$a^ib^jc^k\epsilon_{ijk} = a^ib^jc^k\epsilon_{jki} = a^ib^jc^k\epsilon_{kij}.$$

Nakonec víme, že sudý počet transpozic (tj. výměn sousedních indexů) nemění hodnotu epsilon tensoru, což dokazuje rovnost.

b) Použijeme vše z předchozích příkladů a jednoduše dojdeme k výsledku

$$\begin{aligned} (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) &= \epsilon_{ijk}a^jb^k\epsilon^i{}_{lm}c^ld^m = \epsilon_{ijk}a^jb^k\epsilon^{ilm}c_ld_m = a^jb^kc_ld_m\left(\delta^l_j\delta^m_k - \delta^m_j\delta^l_k\right) = \\ &= a^jb^kc_jd_k - a^jb^kc_kd_j = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}). \end{aligned}$$

4. (†) Pomocí indexové notace ukažte následující identitu

$$\text{rot grad} = 0.$$

Řešení: Nejprve přepišme vektorové operátory do indexové notace. Začněme gradientem. Gradient je složen z parciálních derivací podél souřadnic

$$\text{grad} = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

proto by nemělo být překvapením, že můžeme psát

$$(\text{grad}\, f)_i = \frac{\partial}{\partial x^i}f, \quad i = 1, 2, 3,$$

kde f je funkce. Pro zkrácení zápisu budeme používat následující značení

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Divergence, rotace a laplacián vyplývají z vlastností epsilon tensoru a metriky:

$$\begin{aligned} (\text{rot}\,\vec{v})^i &= (\nabla\times\vec{v})^i = \epsilon^{ij}{}_k\partial_jv^k,\\ \text{div}\,\vec{v} &= \nabla\cdot\vec{v} = \partial_jv^j,\\ \Delta f &= \nabla\cdot\nabla f = \partial_j\partial^jf. \end{aligned}$$

Již máme vše připravené na dokázání identity. Uvažme vhodnou funkci f (měla by mít spojité parciální derivace) a počítejme

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f)^i = \epsilon^{ijk}\partial_j\partial_k f.$$

Výraz $\partial_k f$ hraje roli vektoru v definici rotace. To, že tato identita platí, je dáno tím, že pořadí derivací můžeme zaměnit, tj.

$$\epsilon^{ijk}\partial_j\partial_k f = \epsilon^{ijk}\partial_k\partial_j f.$$

Jinými slovy, výraz je v indexech j a k symetrický. Na druhou stranu, výraz je v indexech j a k také antisymetrický a to kvůli epsilon tensoru. Proto je výsledek nula, podobně jako v prvním příkladu v tomto cvičení.

5. Pomocí indexové notace ukažte následující identity:

$$\begin{aligned} &\text{a) } \mathrm{div}\ \mathrm{rot} = 0, \\ &\text{b) } \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div} - \Delta. \end{aligned}$$

Řešení: a) Podobně jako v předchozím příkladě. Nechť $\vec{v}$ je vhodné vektorové pole. Pak

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = \partial_i\left(\epsilon^{ij}{}_k\partial_j v^k\right) = \epsilon^{ij}{}_k\partial_i\partial_j v^k = 0.$$

Při rozderivování závorky jsme využili to, že v epsilon tensoru jsou jen čísla, jinak řečeno, je to z hlediska derivace konstanta. Identita vyplývá ze symetrie derivací a antisymetrie epsilon tensoru.

b) Opět, nechť $\vec{v}$ je vhodné vektorové pole. Pak

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{v})^i = \epsilon^{ij}{}_k\partial_j\left(\epsilon^{kl}{}_m\partial_l v^m\right) = \epsilon^{ij}{}_k\epsilon^{kl}{}_m\partial_j\partial_l v^m = \epsilon^{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\partial^l v^m = \epsilon^{kij}\epsilon_{klm}\partial_j\partial^l v^m.$$

Nejprve jsme rozderivovali závorku, poté zvýšili/snížili indexy a na závěr, u prvního epsilon tensoru, jsme index k dostali na první místo. Teď použijeme identitu pro kontrakci epsilon tensorů, čím dokážeme identitu

$$\begin{aligned} \epsilon^{kij}\epsilon_{klm}\partial_j\partial^l v^m &= \left(\delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l\right)\partial_j\partial^l v^m = \partial_m\partial^i v^m - \partial_l\partial^l v^i = \partial^i\partial_m v^m - \partial_l\partial^l v^i = \\ &= \left(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v} - \Delta\vec{v}\right)^i. \end{aligned}$$