Páté cvičení z Elektrodynamiky

1. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$\widetilde{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}.$$

„Hint“: bez důkazu můžete použít následující integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Řešení: Fourierova transformace je

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)} \mathrm{d}^3\vec{k}.$$

Zavedeme sférické souřadnice

$$\begin{aligned} k_x &= k\cos\varphi\sin\theta, \\ k_y &= k\sin\varphi\sin\theta, \\ k_z &= k\cos\theta, \end{aligned}$$

kde $k \in (0,\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi)$ a $\theta \in [0,\pi)$. Sférické souřadnice nezavedeme jen tak bezmyšlenkovitě, ale efektivně je využijeme k usnadnění výpočtu. Náš souřadný systém, přes který integrujeme, zvolíme tak, aby vektor $\vec{k}_z$ mířil vždy ve směru vektoru $\vec{x}$. Potom totiž bude úhel mezi vektory $\vec{k}$ a $\vec{x}$ právě úhel θ. Díky čemuž můžeme psát skalární součin vektorů $\vec{k}$ a $\vec{x}$ jako

$$\vec{k}\cdot\vec{x} = kr\cos\theta,$$

kde r je velikost polohového vektoru $\vec{x}$. Dosaďme vše do integrálu

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}}{k^2} \sin\theta k^2 \mathrm{d}k\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} \sin\theta \mathrm{d}k\mathrm{d}\theta.$$

Zavedeme substituci

$$\begin{aligned} \mathrm{i}kr\cos\theta &= \alpha, \\ k &= \tilde{k}, \\ 0 &\to \mathrm{i}\tilde{k}r, \\ \pi &\to -\mathrm{i}\tilde{k}r. \end{aligned}$$

Jakobián je dán jako

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial k}{\partial \tilde{k}} & \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{k}} \\ \frac{\partial k}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \end{vmatrix},$$

pro jeho vypočítání bychom museli invertovat naši substituci. Místo toho budeme počítat J^{-1}, který je dán jako

$$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial k} & \frac{\partial \alpha}{\partial k} \\ \frac{\partial k}{\partial \theta} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \mathrm{i}kr\sin\theta.$$

Dosaďme opět vše do integrálu

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \int_{\mathrm{i}\tilde{k}r}^{-\mathrm{i}\tilde{k}r} \frac{1}{\mathrm{i}\tilde{k}r\sin\theta}\mathrm{e}^\alpha \sin\theta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\tilde{k} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \int_{-\mathrm{i}\tilde{k}r}^{\mathrm{i}\tilde{k}r} \frac{\mathrm{e}^\alpha}{\mathrm{i}\tilde{k}r}\mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\tilde{k} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{k}r} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{k}r}}{\mathrm{i}\tilde{k}r}\mathrm{d}\tilde{k} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin\tilde{k}r}{\tilde{k}r}\mathrm{d}\tilde{k} = \left| \begin{array}{c} \tilde{k}r = t \\ r\mathrm{d}\tilde{k} = \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$
$$= \frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi r}.$$

Poslední integrál je přesně ten z nápovědy v zadání.

Poznámka: Výsledek se liší od správného výsledku (viz skripta rovnice (24)) o mínus. Bohužel tu chybu nikde nemůžu najít, takže jestli se to někomu povede, napište mi, kde je.

2. Odvoďte ze vzorce pro potenciál elektrického pole

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} G\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)\rho\left(\vec{x}'\right)\mathrm{d}^3\vec{x}', \text{ kde } G\left(\vec{x}-\vec{x}'\right) = -\frac{1}{4\pi\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|},$$

vzorec pro intenzitu elektrického pole $\vec{E}\left(\vec{x}\right)$.

Řešení: Intenzita elektrického pole je dána jako

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\mathrm{grad}\phi(\vec{x}).$$

Tudíž skalární potenciál pouze zderivujeme podle souřadnic. Spočtěme to pro souřadnici x, ostatní dvě složky budou analogické.

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}^3\vec{x}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\vec{x}')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\mathrm{d}^3\vec{x}' =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\vec{x}')2(x-x')}{-2\left(\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right)^3}\mathrm{d}^3\vec{x}' =$$
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\vec{x}')(x-x')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\mathrm{d}^3\vec{x}'.$$

Dohromady tedy máme

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\mathrm{d}^3\vec{x}'.$$

3. Využijte výsledku předchozího příkladu, tj.

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\mathrm{d}^3\vec{x}'$$

a spočtěte elektrickou intenzitu kolem nekonečně dlouhého homogenně nabitého drátu. (Hint: hustotu náboje můžete volit například jako $\rho(\vec{x}) = \lambda\delta(x)\delta(y)$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$, ale vysvětlete proč!)

Řešení: Nejprve diskutujme, proč lze zvolit hustotu náboje jako $\rho(\vec{x}) = \lambda\delta(x)\delta(y)$. Budeme předpokládat, že drát je natažen podél osy z. Náboj je tedy koncentrován jen na tomto drátu, v celém zbylém prostoru je nulový. Takže hledáme funkci, která je nenulová pouze na ose z. Což nám přesně zařídí dvě delta funkce $\delta(x)\delta(y)$, první říká, že nenulová je rovina $x = 0$, druhá, že nenulová je rovina $y = 0$. Průnik těchto rovin je právě osa z. λ je vhodná konstanta, která popisuje lineární hustotu náboje na drátu. Dosaďme všechny informace do integrálu

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda\delta(x')\delta(y')(x-x', y-y', z-z')}{\left(\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right)^3}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'.$$

Integrace přes delta funkce je vždy jednoduchá, například při integraci přes x' dosadíme do integrandu za všechny x' nulu, a smažeme příslušný integrál. Tedy po integraci přes delta funkce je elektrická intenzita rovna

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x, y, z-z')}{\left(\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}\right)^3}\mathrm{d}z'.$$

Celkem tedy máme počítat tři integrály, dva z nich jsou ale stejné. Označme $x^2 + y^2 = r^2$ a počítejme

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z'}{\left(\sqrt{r^2+(z-z')^2}\right)^3} &= \left|\begin{array}{cc} \zeta = \frac{z-z'}{r} & \mathrm{d}\zeta = -\frac{\mathrm{d}z'}{r} \\ -\infty \to \infty & \infty \to -\infty \end{array}\right| = \frac{1}{r^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}^3} = \\
&= \left|\begin{array}{cc} \zeta = \sinh\alpha & \mathrm{d}\zeta = \cosh\alpha\mathrm{d}\alpha \\ \infty \to \infty & -\infty \to -\infty \end{array}\right| = \frac{1}{r^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cosh\alpha\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1+\sinh^2\alpha}^3} = \\
&= \frac{1}{r^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cosh\alpha\mathrm{d}\alpha}{\cosh^3\alpha} = \frac{1}{r^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\cosh^2\alpha} = \\
&= \frac{1}{r^2}\left[\tanh\alpha\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{r^2}, \\
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(z-z')\mathrm{d}z'}{\left(\sqrt{r^2+(z-z')^2}\right)^3} &= \left|\begin{array}{cc} \zeta = \frac{z-z'}{r} & \mathrm{d}\zeta = -\frac{\mathrm{d}z'}{r} \\ -\infty \to \infty & \infty \to -\infty \end{array}\right| = \frac{1}{r^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}^3} = 0.
\end{aligned}$$

Druhý integrál je nulový, jelikož jde o podíl liché a sudé funkce, což je lichá funkce, a integrál liché funkce přes symetrický interval je nulový. Výsledek tedy je

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}(x, y, 0).$$

Ještě můžeme spočítat velikost tohoto vektoru

$$\left|\vec{E}(\vec{x})\right| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$$

což je známý výsledek, který se dá jednoduše zjistit z Gaußova zákona.

4. Vyjádřete následující rozložení náboje pomocí δ-funkcí ve tvaru prostorové hustoty $\rho(\vec{x})$ v zadaných souřadnicích. Ověřte, jestli

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) \mathrm{d}^3\vec{x}$$

dává očekávaný výsledek.

a) Náboj Q rovnoměrně rozložený po povrchu koule s poloměrem R. Použijte sférické souřadnice.

b) Náboj Q rovnoměrně rozložený na nekonečně tenkém kruhovém disku s poloměrem R. Použijte válcové souřadnice.

Hint: V b) se dá využít Heavisidova funkce $\Theta(x)$, která se definuje jako

$$\Theta(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Řešení: a) Jelikož má být náboj rovnoměrně rozmístěn po celé kulové slupce, hustota náboje nemůže záviset na úhlových parametrech. Poloměr koule je R, tudíž chceme, aby jediný nenulový příspěvek k hustotě náboje byl ve vzdálenosti R od středu, to se dá dosáhnout pomocí $\delta(r - R)$. Hustota náboje tedy je

$$\rho(\vec{x}) = \sigma\delta(r - R),$$

kde $\sigma \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta značící konstantní plošnou hustotu náboje. Celkový náboj je jednoduše dán jako plošná hustota krát povrch koule, tj. $Q = 4\pi\sigma R^2$. Ověřme ještě integrál

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) \mathrm{d}^3\vec{x} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \sigma\delta(r - R) r^2 \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta = \sigma R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta =$$
$$= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 4\pi\sigma R^2.$$

b) Umístíme disk do roviny $z = 0$. V hustotě náboje se tedy objeví $\delta(z)$. Dál má být náboj pouze v určité ohraničené oblasti, na což využijeme Heavisidovu funkci $\Theta(r)$. Abychom dostali nenulový příspěvek ze vnitřku disku, musí být v hustotě náboje $\Theta(R - r)$. (Nenulový příspěvek se podle definice má dostat pro $R - r \geq 0$, což znamená $r \leq R$.) Hustota náboje tedy je

$$\rho(\vec{x}) = \sigma\delta(z)\Theta(R - r).$$

Celkový náboj opět jednoduše spočteme jako povrch disku krát konstantní plošná hustota, tedy $Q = \sigma\pi R^2$. Spočteme integrál

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) \mathrm{d}^3\vec{x} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sigma\Theta(R - r)\delta(z) r \mathrm{d}r \mathrm{d}z \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \sigma\Theta(R - r) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi =$$
$$= 2\pi\sigma \int_0^{\infty} \Theta(R - r) r \mathrm{d}r = 2\pi\sigma \int_0^{R} r \mathrm{d}r = \pi\sigma R^2.$$

Integrace přes Heavisideovu funkci probíhá tak, že změní integrační meze na interval, kde je nenulová. V našem případě je nenulová pro $r \leq R$, tudíž horní mez bude místo nekonečna R.