Sedmé cvičení z Elektrodynamiky

1. Vypočtěte magnetickou indukci z vektorového potenciálu

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \mathrm{d}^3\vec{x}'.$$

Řešení: Magnetická indukce je dána jako $\vec{B}(\vec{x}) = \mathrm{rot}\, \vec{A}(\vec{x})$. Pro výpočet použijeme indexový zápis, tedy vektorový potenciál je

$$A^i(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} j^i(\vec{x}') \frac{1}{\sqrt{\sum_{l=1}^3 (x^l - x'^l)^2}} \mathrm{d}^3\vec{x}'.$$

Počítejme

$$\begin{aligned} B^j(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^{jk}{}_i \partial_k \left(j^i(\vec{x}') \frac{1}{\sqrt{\sum_{l=1}^3 (x^l - x'^l)^2}} \right) \mathrm{d}^3\vec{x}' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^{jk}{}_i \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2(x_l - x'_l)\delta^l_k}{\left(\sqrt{\sum_{n=1}^3 (x^n - x'^n)^2} \right)^3} \mathrm{d}^3\vec{x}' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon^{jk}{}_i j^i(\vec{x}')(x_k - x'_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \mathrm{d}^3\vec{x}' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon^{j}{}_i{}^k j^i(\vec{x}')(x_k - x'_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \mathrm{d}^3\vec{x}'. \end{aligned}$$

Vektorově tedy máme

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \mathrm{d}^3\vec{x}'.$$

2. Využijte vzorec z předchozího příkladu, tj.

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \mathrm{d}^3\vec{x}',$$

a spočtěte magnetickou indukci od nekonečně dlouhého lineárního vodiče jímž protéká konstantní proud I.

Řešení: Nejprve musíme určit hustotu proudu $\vec{j}(\vec{x})$. Natáhněme drát podél osy z. Stejně jako u hustoty náboje v jednom předchozích cvičení, se v hustotě proudu kvůli tomuhle objeví $\delta(x)$ a $\delta(y)$. Dál proud bude téci jen ve směru z, tzn. proudová hustota bude mít směr vektoru $(0, 0, 1)$. Na závěr má být proud konstantní o velikosti I, tudíž vše dohromady

$$\vec{j}(\vec{x}) = (0, 0, I)\delta(x)\delta(y).$$

Dosaďme do integrálu a počítejme

$$
\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\vec{j}(\vec{x}')\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\mathrm{d}^3\vec{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(0,0,I)\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\delta(x)\delta(y)\mathrm{d}^3\vec{x}' = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{(0,0,I)\times(x,y,z-z')}{\left(\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}\right)^3}\mathrm{d}z' = \left| r^2 = x^2+y^2 \right| = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-y,x,0)}{\left(\sqrt{r^2+(z-z')^2}\right)^3}\mathrm{d}z' = \frac{\mu_0 I}{4r^3\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-y,x,0)}{\left(\sqrt{1+\frac{(z-z')^2}{r^2}}\right)^3}\mathrm{d}z' = \\
&= \left| \begin{array}{c} \frac{z-z'}{r} = \zeta \\ -\frac{\mathrm{d}z'}{r} = \mathrm{d}\zeta \end{array} \right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-y,x,0)}{\sqrt{1+\zeta^2}^3}\mathrm{d}\zeta = \left| \begin{array}{c} \zeta = \sinh\alpha \\ \mathrm{d}\zeta = \cosh\alpha\mathrm{d}\alpha \end{array} \right| = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}(-y,x,0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh^2\alpha}\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}(-y,x,0)\left[\operatorname{tgh}\alpha\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}(-y,x,0).
\end{aligned}
$$

3. Vypočtěte vektorový potenciál $\vec{A}(\vec{x})$ ve velké vzdálenosti od kruhové smyčky s poloměrem R, kterou prochází konstantní proud I. Dále najděte magnetický moment $\vec{m}$, pomocí něhož se dá vektorový potenciál zapsat jako

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3},$$

tj. smyčka „vypadá“ jako magnetický dipól. (Velká vzdálenost znamená, že předpokládáme $|\vec{x}| \gg R$.)

Řešení: Vektorový potenciál spočtěme ze vzorce

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}^3\vec{x}'.$$

Nejprve musíme parametrizovat hustotu proudu $\vec{j}(\vec{x}')$. Budeme používat válcové souřadnice. Kružnici umístíme do roviny $x'y'$, to zařídíme delta funkcí $\delta(z')$. Dál pomocí $\delta(r'-R)$ se omezíme pouze na kružnici. Dál potřebujeme parametrizovat směr proudu protékající kružnicí. Proud bude protékat proti směru hodinových ručiček. Směr v jednotlivých bodech kružnice je dán tečným vektorem ke kružnici v těch bodech. Tečný vektor získáme třeba derivováním parametrizace kružnice (kružnici se parametrizuje jako $(\cos\varphi', \sin\varphi', 0)$, $\varphi' \in [0, 2\pi)$). Tečný vektor tedy je $(-\sin\varphi', \cos\varphi', 0)$. Nakonec potřebujeme rozměrovou konstantu, tou je proud I. Dohromady tedy

$$\vec{j}(\vec{x}') = I\delta(z')\delta(r'-R)(-\sin\varphi', \cos\varphi', 0).$$

Dosaďme do integrálu a chvíli počítejme

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{I\delta(z')\delta(r'-R)(-\sin\varphi',\cos\varphi',0)r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}z'\mathrm{d}\varphi'}{\sqrt{(x-r'\cos\varphi')^2+(y-r'\sin\varphi')^2+(z-z')^2}} = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R(-\sin\varphi',\cos\varphi',0)\mathrm{d}\varphi'}{\sqrt{(x-R\cos\varphi')^2+(y-R\sin\varphi')^2+z^2}} = \\
&= \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(-\sin\varphi',\cos\varphi',0)\mathrm{d}\varphi'}{\sqrt{|\vec{x}|^2-2Rx\cos\varphi'+R^2\cos^2\varphi'-2Ry\sin\varphi'+R^2\sin^2\varphi'}} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{|\vec{x}|}\int_0^{2\pi}\frac{(-\sin\varphi',\cos\varphi',0)\mathrm{d}\varphi'}{\sqrt{1+\frac{R^2}{|\vec{x}|^2}-\frac{2R}{|\vec{x}|^2}(x\cos\varphi'+y\sin\varphi')}}.
\end{aligned}$$

Tento integrál se nazývá eliptický integrál. Jeho řešení je zbytečně složité, proto se uchýlíme k aproximacím. Budeme předpokládat $|\vec{x}| \gg R$. Přepišme tuto podmínku jako

$$1 \gg \frac{R}{|\vec{x}|} = \epsilon.$$

Vidíme, že druhý člen v odmocnině je řádu ϵ^2. Třetí člen v odmocnině je pouze řadu ϵ. Sice ve jmenovateli je $|\vec{x}|^2$, ale v čitateli zlomku jsou ještě x a y, které jdou taky do nekonečna. Proto druhý člen zanedbáme a zůstává.

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{|\vec{x}|}\int_0^{2\pi}\frac{(-\sin\varphi',\cos\varphi',0)\mathrm{d}\varphi'}{\sqrt{1-\frac{2R}{|\vec{x}|^2}(x\cos\varphi'+y\sin\varphi')}}.$$

Dále použijeme následující aproximaci pro odmocninu

$$\sqrt{1-\epsilon} \approx 1-\frac{\epsilon}{2}.$$

Tudíž vektorový potenciál je

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{|\vec{x}|}\int_0^{2\pi}\frac{(-\sin\varphi',\cos\varphi',0)\mathrm{d}\varphi'}{1-\frac{R}{|\vec{x}|^2}(x\cos\varphi'+y\sin\varphi')}.$$

Dál použijeme aproximaci pro zlomek

$$\frac{1}{1-\epsilon} \approx 1+\epsilon.$$

Dostáváme integrál, který lze již vyřešit

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{|\vec{x}|}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{R}{|\vec{x}|^2}\left(x\cos\varphi'+y\sin\varphi'\right)\right)(-\sin\varphi',\cos\varphi',0)\,\mathrm{d}\varphi'.$$

Využijeme následujícího

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi'\mathrm{d}\varphi' = \int_0^{2\pi}\cos\varphi'\mathrm{d}\varphi' = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi' = 0, \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi'\mathrm{d}\varphi' = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi'\mathrm{d}\varphi' = \pi$$

a dostáváme

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2\pi}{|\vec{x}|^3}(-y, x, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IS}{|\vec{x}|^3}(-y, x, 0),$$

kde S je plocha, kterou smyčka ohraničuje. Magnetický moment $\vec{m}$ zjistíme už snadno jako, vyjde

$$\vec{m} = \left(0, 0, \frac{\mu_0}{4\pi}IS\right).$$

Tvar magnetického momentu je stejný jako magnetický moment pro magnetický dipól (tj. magnet) s velikostí $\frac{\mu_0}{4\pi}IS$. Díky tomuto můžeme vždy magnety aproximovat jako kruhové smyčky, kterými prochází elektrický proud.

4. Vypočtěte energii elektrického pole od homogenně nabité koule o poloměru R. Hustota energie se počítá jako

$$W = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right),$$

tudíž celková energie bude

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}^3} W \mathrm{d}^3\vec{x}.$$

Řešení: Nejprve si zjednodušme vzorec pro hustotu energie. V našem příkladě není žádné magnetické pole, tudíž $\vec{B} = 0$ a $\vec{H} = 0$. Navíc koule je vodivá, proto se elektrická indukce spočítá jako $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ a celkem

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

Elektrickou intenzitou spočteme pomocí Gaußova zákona

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{uzavřený}}}{\varepsilon_0}.$$

Pro vnitřek koule $r < R$ Gaußův zákon vede na

$$E_{\text{in}} 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{\varepsilon_0},$$
$$E_{\text{in}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\frac{3Q}{4\pi R^3}}{4\pi r^2\varepsilon_0},$$
$$E_{\text{in}} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Podobně pro vnějšek koule dostaneme

$$E_{\text{out}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Na závěr spočtěme celkovou energii

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \int_{\mathbb{R}} W\mathrm{d}^3\vec{x} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} E_{\text{in}}^2 r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_R^{\infty} E_{\text{out}}^2 r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{Q^2r^2}{16\pi^2R^6\varepsilon_0^2}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_R^{\infty}\frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2r^4}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{Q^2}{32\varepsilon_0\pi^2R^6}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi + \frac{Q^2}{32\varepsilon_0\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_R^{\infty}\frac{\sin\theta}{r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3}{20}\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R} = \frac{4}{15}\frac{\pi\rho^2R^5}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$