

## Metoda konečných prvků (Finite Elements Method)

metoda konečných diferencí:

- průběh funkce je přesný
- vyjádření derivace je přibližné

metoda konečných prvků:

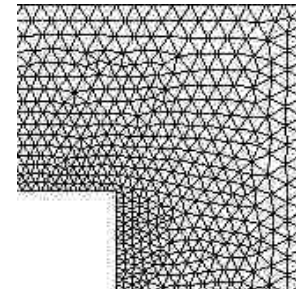
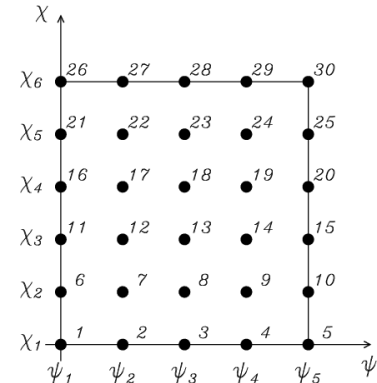
- průběh funkce je přibližný
- vyjádření derivace je přesné

výhody MKP: dobře popisuje složité oblasti

nevýhody MKP: těžko se získávají testovací 'analytická' řešení

Zkoumaná oblast  $\Omega$  je rozdělena na *elementy*  $T^j$ ; v rámci každého z elementů se fyzikální parametry úlohy zpravidla předpokládají konstantní (na (společné) hranici dvou elementů tedy často mají skok).

Hledaná veličina  $\psi(x)$ , se diskretizuje jako  $\psi[i]$  v uzlech v místech vrcholů elementů  $T^j$ . Uzly, které jsou prvky hranice  $\partial\Omega$  nazýváme *hraniční*, ostatní uzly označujeme jako *vnitřní*.



Aproximace se provádí s pomocí *tvarových funkcí*  $N^T[i]$  (lineárních, kvadratických ... obecně řádu  $k$ ) vztahujících uzel  $i$  s přilehlými elementy  $T$

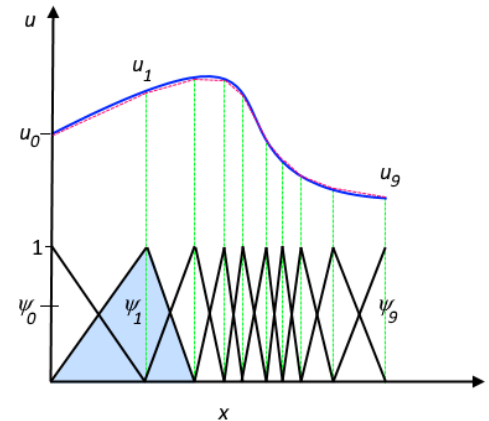
všeobecně platí, že se snažíme používat nejnižší řád aproximace, který ještě umožní najít netriviální řešení zvolené diferenciální rovnice; například pro rovnice druhého řádu stačí  $k = 1$ .

lepší aproximace dosáhneme překročením nejnižšího řádu, v praxi často znamená možnost hrubšího dělení  $\Omega$ ; jednotlivé elementy vš: získávají větší počet parametrů a tak výpočetní úspora nemusí b velká.

řádům  $k \geq 3$  se vyhýbáme kvůli jejich tendenci oscilovat.

a následně vytvořených *aproximačních funkcí*  $N[i]$  jako sjednocení všech  $N^T[i]$  zkonstruovaných z tvarových funkcí, které zasahují do elementů  $T$  obsahujících uzel  $i$ .

zjevně tedy  $N[i]$  a  $N[j]$  mají nenulovou společnou podporu pouze pokud uzly  $i$  a  $j$  náležejí stejnému elementu.



## Metoda konečných prvků v 1D

V případě 1D úlohy vznikají elementy  $T$  prostým (byť nehomogenním) dělením intervalu  $\Omega \in \mathbb{R}$  na subintervaly.

U všech typů elementů je třeba dbát, aby byly nedegenerované, tj. aby  $\int_T d\Omega \neq 0$ , v 1D se podmínka redukuje na vyloučení subintervalů nulové délky.

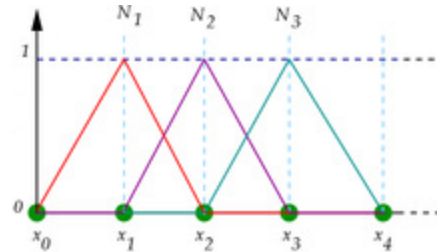
Lineární tvarové funkce  $N^-[i]$ , resp.  $N^+[i]$  spojují uzel  $i$  s nejbližším sousedem vlevo a vpravo a mají formu úseček nabývajících hodnoty 1 v uzlu  $i$  a hodnoty 0 v uzlu  $i - 1$ , resp.  $i + 1$ :

$$N^-[i] : y = \frac{x - x[i - 1]}{x[i] - x[i - 1]} \quad x \in \langle x[i - 1], x[i] \rangle$$

$$N^+[i] : y = \frac{x - x[i + 1]}{x[i] - x[i + 1]} \quad x \in \langle x[i], x[i + 1] \rangle$$

Aproximační funkce  $N[i]$  je potom sjednocením  $N[i] = N^-[i] \cup N^+[i]$ .

U vyšších řádů tvarových funkcí se pro každý element přidávají vnitřní parametry, ovlivňující chování složitějších křivek na každém z intervalů (počet přidanych parametrů je dán balancováním stupňů volnosti).



Jádro metody vzniká spojením dvou fundamentálních kroků:

1) uvědoměním, že hledanou funkci  $\Psi$  můžeme (ve spojité oblasti) vyjádřit jako

$$\Psi(x) = \sum_i \Psi[i]N[i]$$

pouze s využitím hodnot  $\Psi[i]$  v diskretizovaných uzlech.

zároveň, díky volbě aproximačních funkcí nezasahujících za nejbližších  $k$  sousedů, se na příspěvku v daném intervalu  $\langle x[i], x[i+1] \rangle$  podílí jen  $k$  tvarových funkcí (resp.  $k$  jejich aproximačních větví)

přitom  $\Psi[i]$  jsou z hlediska diferenciálního operátoru konstantami.

Skutečně, pro  $k = 1$  mezi dvěma body platí

$$\Psi(x) = \frac{\Psi[i] - \Psi[i+1]}{x[i+1] - x[i]}x + \frac{\Psi[i]x[i+1] - \Psi[i+1]x[i]}{x[i+1] - x[i]} \quad x \in \langle x[i], x[i+1] \rangle$$

Tímto způsobem je do formulace vnesena nespojitost (v prvních derivacích pro  $k = 1$ , atd.), ale metoda jako celek je na to připravena druhým krokem,

2) reformulováním tzv. *slabé variační úlohy* pro řešenou soustavu rovnic

## Slabá formulace variační úlohy

Budeme se zabývat řešením Cauchyova problému pro lineární diferenciální operátor  $L$  (obsahující derivace)  $k$ -tého řádu. Uvažujme tedy oblast  $\Omega$  s hranicí  $\partial\Omega$  a na ní rovnici

$$Lu = 0,$$

včetně příslušných okrajových podmínek  $f(u, \nabla u, \dots)|_{\partial\Omega}$ .

Aplikovat metodu konečných prvků jako  $L\bar{u} = 0$  prostřednictvím  $\bar{u} = \sum_i u[i]N[i]$  formálně nelze kvůli nespojitosti tvarových funkcí. Mohli bychom ovšem uvažovat slabší podmínku

$$\int_{\Omega} L(\bar{u})d\Omega = 0.$$

Jelikož se jedná o integraci v Riemannově smyslu, jsou povoleny nespojitosti na množině míry nula. Řešení původní rovnice splní i slabší intergrální podmínku, opačně to ale neplatí.

Z důvodu aproximace MKP slabší řešení navíc původní formulaci vyhovět ani nemůže a musíme obecně očekávat

$$R \equiv L(\bar{u}) \neq 0.$$

Máme pochopitelně zájem o co nejlepší splnění výchozí rovnice, a v tomto ohledu existuje několik postupů, které je možné aplikovat:

**metoda nejmenších čtverců.** Požadujeme

$$\int_{\Omega} R^2 d\Omega \rightarrow \min,$$

a aplikací standardního aparátu metody nejmenších čtverců dostaneme

$$j : \quad 2 \int_{\Omega} R \frac{\partial R}{\partial u[j]} d\Omega = 0.$$

**metoda vážených reziduí.** Reziduum se minimalizuje vzhledem ke vhodným váhovým funkcím podmínkami

$$j : \quad \int_{\Omega} w_j R d\Omega = 0$$

metoda nejmenších čtverců:  $w_j = \frac{\partial R}{\partial u[j]}$

metoda kolokační:  $w_j = \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}[j]|)$  – fixujeme přesné splnění rovnice v uzlových bodech

metoda Galerkinova:  $w_j = N[j]$  – nejlepší aproximace na (pod)prostoru  $\text{span}(N[j])$