D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

MKP – příklad sestavení v 1D, Poissonova rovnice

Uvažujme Poissonovu rovnici

$$L(u) \equiv \Delta u - 4\pi\rho = 0.$$

Je-li $\bar{u} = \sum_i u[i]N[i]$, dostáváme pro Galerkinovy podmínky

$$j: \qquad \int_\Omega N[j]L\left(\sum_i u[i]N[i]\right) \mathrm{d}\,\Omega = \sum_i u[i] \int_\Omega N[j]\nabla(\nabla N[i])\mathrm{d}\,\Omega - 4\pi \int_\Omega N[j]\rho \mathrm{d}\,\Omega = 0,$$

kde ovšem můžeme psát $N[j]\nabla(\nabla N[i]) = \nabla(N[j]\nabla N[i]) - \nabla N[j]\nabla N[i]$ a na první člen použít Gaussovu větu. Dostaneme

$$j: \qquad \sum_i u[i] \int_{\partial\Omega} N[j]\nabla N[i]\mathrm{d}\,W - \sum_i u[i] \int_\Omega \nabla N[j]\nabla N[i]\mathrm{d}\,\Omega = 4\pi \int_\Omega N[j]\rho \mathrm{d}\,\Omega,$$

což je algebraická soustava $\mathbf{Ku} = \mathbf{b}$, kde příspěvek objemových členů je

$$K_{ij} = \int_\Omega \nabla N[j]\nabla N[i]\mathrm{d}\,\Omega \qquad b_j = 4\pi \int_\Omega N[j]\rho \mathrm{d}\,\Omega.$$

Omezíme-li se Dirichletovými a homogenními Neumannovými podmínkami, nepřináší okrajový integrál žádný vklad. Přesněji, triviální Neumannova podmínka nevyžaduje žádnou modifikaci rovnic, podmínka Dirichletova svými hodnotami vstoupí do integrálu u okrajových elementů, ale jelikož je hodnota na hranici zadána, všechny takové členy se převádí jako konstanta na pravou stranu (v Dirichletovsky zadaných uzlech rovnice nesestavujeme).

D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

V uvedeném zápisu by sestavení rovnic procházelo ve velké smyčce všechny uzly, v každém cyklu by se dohledávaly všechny elementy, které uzel obsahují. To není praktické, zejména ve vyšších dimenzích výstup z generátoru sítě obsahuje primárně seznam elementů a jeho neustálé prohledávání pro aktuální uzel by bylo extrémně zdlouhavé.

Budeme proto matici soustavy a vektor pravé strany sestavovat ve smyčce přes jednotlivé elementy: v 1D máme úsečky $T(x[i], x[j])$ a na nich jednotlivé větve aproximačních funkcí,

$$N_T[j] = \frac{x - x[i]}{x[j] - x[i]}, \qquad N_T[i] = \frac{x - x[j]}{x[i] - x[j]}.$$

Na každém elementu budou existovat dva typy příspěvků: dva diagonální, typu

$$K_{jj} \mathrel{+}= \int_T (\nabla N_T[j])^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{(x[j] - x[i])^2} \int_{x[i]}^{x[j]} \mathrm{d}x = \frac{1}{x[j] - x[i]} > 0 \text{ pro } x[j] > x[i]$$

a mimodiagonální, typu

$$K_{ij} \mathrel{+}= \int_{x[i]}^{x[j]} \nabla N_T[j] \nabla N_T[i] \mathrm{d}x = -\frac{1}{(x[j] - x[i])^2} \int_{x[i]}^{x[j]} \mathrm{d}x = -\frac{1}{x[j] - x[i]} < 0 \text{ pro } x[j] > x[i].$$

Základní kontrolou našeho sestavení je symetrie matice K, v obecnějším případě bývá matice soustavy před zavedením okrajových podmínek hermiteovská. V praxi pořadí uzlů neřešíme a ve jmenovateli použijeme délku elementu $l_T = |x[j] - x[i]|$.

D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

Komponenty vektoru pravé strany $b_j = 4\pi \int_\Omega N[j]\rho \mathrm{d}\,\Omega$ se rovněž rozpadají na příspěvky v rámci jednotlivých elementů. V souladu s myšlenkou MKP můžeme uvažovat $\rho = \sum_i \rho[i]N[i]$, potom

$$b_j = 4\pi \sum_i \rho[i] \int_\Omega N[j]N[i]\mathrm{d}\,x$$

dá na elementu $T(I,J)$ příspěvky

$$b[J] \mathrel{+}= 4\pi \left[\frac{\rho[I]}{6} + \frac{\rho[J]}{3}\right] l_T \qquad b[I] \mathrel{+}= 4\pi \left[\frac{\rho[J]}{6} + \frac{\rho[I]}{3}\right] l_T$$

Vypišme si všechny získané koeficienty ve zjednodušením případě ekvidistantního kroku ε:

$$K_{j-1\,j} = -\frac{1}{\varepsilon} \quad K_{j\,j} = \frac{2}{\varepsilon} \quad K_{j+1\,j} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{b[j]}{4\pi} = \varepsilon \left[\frac{\rho[j-1] + 4\rho[j] + \rho[j+1]}{6}\right].$$

S ε z pravé strany rozeznáváme v sestavené matici diskretizovaný Laplasián, na pravé straně zbývá váhovaný průměr hodnot v okolí aktuálního uzlu, přičemž většina váhy spočívá na hodnotě v aktuálním uzlu. Důvod této změny (ve FD by vystupoval pouze aktuální uzel) tkví v Galerkinově optimalizaci - rovnici se snažíme plnit nejen v uzlových bodech, ale i v oblasti mezi nimi.

D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

Celé sestavení FEM v našem případě vypadá takto:

vytvoření prázdné matice **K** o velikosti počtu vnitřních uzlů
vytvoření prázdného vektoru **b** o délce počtu vnitřních uzlů

pro každý element $T(I,J)$ *:*

$$l_T = |x[I] - x[J]|$$

pro **vnitřní** uzly I,J elementu T:

1a) $K_{II} \mathrel{+}= 1/l_T$

1b) $K_{JJ} \mathrel{+}= 1/l_T$

1c) $K_{IJ} \mathrel{+}= -1/l_T$

1d) $K_{JI} \mathrel{+}= -1/l_T$

2a) $b_I \mathrel{+}= 4\pi \left[\frac{\rho[J]}{6} + \frac{\rho[I]}{3}\right] l_T$

2b) $b_J \mathrel{+}= 4\pi \left[\frac{\rho[I]}{6} + \frac{\rho[J]}{3}\right] l_T$

další element.

(V předchozím zápisu se z výpočtu vynechají kroky, v nichž by kterýkoliv z uzlů I, J nebyl vnitřní.)