

A visualization of the cosmic web, showing a complex network of filaments and nodes of dark matter and gas. The filaments are colored in shades of blue, green, and orange, set against a dark background with scattered stars.

Astrofyzika VIII. cvičení

Kosmická mechanika

Vladimír Štefl

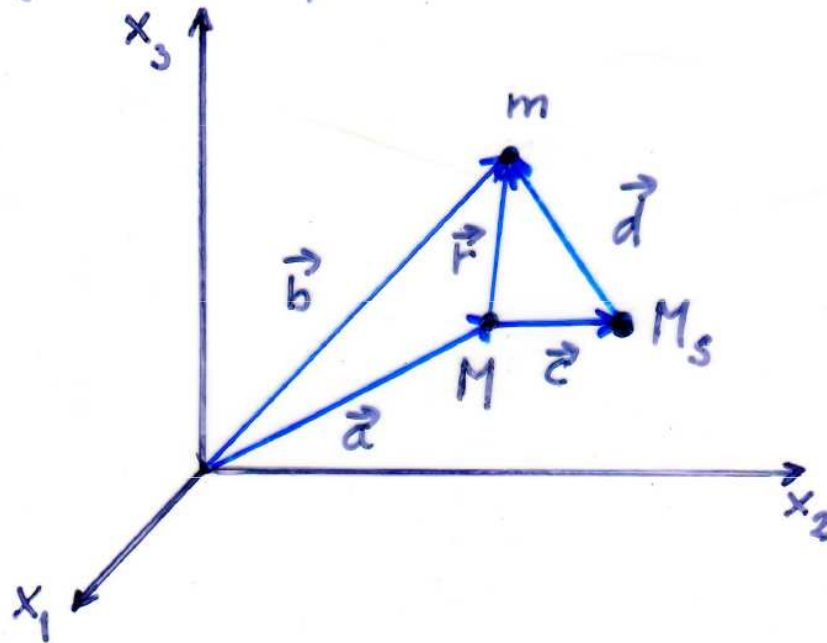
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Oblast aktivity planet

Studium pohybu měsíců, komet, kosmických sond
v gravitačním poli, poruchové síly ostatních kosmických
těles, zejména Slunce, podstatu poruchových sil -

gravitace

kvantitativní charakteristika - **oblast aktivity**, sféra
aktivity, pro vyhledání grav. sílu planety a Slunce
na zkomponovaný pohyb měsíce; přesný fyzikální
smysl pojmu... vyhled.



m...Měsíc - těleso

M...planeta

Ms...Slunce

Oblast aktivity planet - pohybové rovnice

pohybové rovnice centrálního tělesa - planety je

$$(1) \quad M \frac{d^2 \vec{a}}{dt^2} = G \frac{M m}{r^3} \vec{r} + G \frac{M M_s}{c^3} \vec{c}$$

pohybové rovnice pro měsíc

$$(2) \quad m \frac{d^2 \vec{b}}{dt^2} = -G \frac{M m}{r^3} \vec{r} - G \frac{m M_s}{d^3} \vec{d}$$

Odečtením (2) - (1) dostaneme

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r} - \cancel{G \frac{m}{r^3} \vec{r}} - G M_s \left(\frac{\vec{d}}{d^3} + \frac{\vec{c}}{c^3} \right)$$

Oblast aktivity planet – zrychlení, definice

polohové rovnice měřka vzhledem k centrálnímu tělesu - planetě při zpočtem grav. působení Slunce
zrychlení vyvolané proudovou gravitací přitaž. Slunce je

$$\vec{a} = -G M_S \left(\frac{\vec{d}}{d^3} + \frac{\vec{c}}{c^3} \right)$$

velikost je závislá na vzdálenosti měřka - Slunce

oblast aktivity planet - definice

geometrické místo bodů, kde je splněno

$$\frac{a_{Mp}}{a_{Ms}} \geq \frac{a_{M'p}}{a_M}$$

podíl poruchových
a hlavních zrychlení

Oblast aktivity planet - zrychlení

a_{Mp} ... průměrné zrychlení, kterým působí planeta na měsíc

$$a_{Mp} = GM \left| \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{c}}{c^3} \right|$$

a_{Ms} ... zrychlení grav. pole slunce, kterým působí na měsíc, $a_{Ms} = G \frac{M_s}{d^2}$

$a_{M'p}$... průměrné zrychlení, kterým působí slunce na planetu

$$a_{M'p} = GM_s \left| \frac{\vec{d}}{d^3} + \frac{\vec{c}}{c^3} \right|$$

a_M ... zrychlení, kterým působí planeta na měsíc

$$a_M = G \frac{M}{r^2}$$

Oblast aktivity planet – definice

prostor aktivity, bližá se sféře, kolem planety

Umístěte oblasti aktivity planety vzhledem k Slunci
převládá síla planety nad slunečním působením
Slunce. Přesněji umístěte oblasti aktivity by planety
"slabší" pohyb vztahovaný ke Slunci více než
"silnější" Slunce pohyb vztahovaný k planetě.

Oblast aktivity planety definice

Oblastí aktivity planety nazýváme prostor kolem planety, ve kterém platí, že poměr rychlosti sdílené měšci planetou ke proudovému rychlosti sdílené Sluncem v ní, než poměr rychlosti sdílené Sluncem proudovému rychlosti sdílené planetou. Proto uvádějí oblasti aktivity planety polohy měšců, kosmických dráh atd... vztahujeme k planetě jako k centrálnímu tělesu.

Oblast aktivity planet

pro poloměry oblasti grav. působení planet platí
přibližný vztah $r = r_0 \left(\frac{M}{M_S} \right)^{2/5}$

r_0 - je vzdálenost planeta - Slunce

největší poloměry aktivity z planet mají postupně
Neptun, Saturn, Uran, Jupiter, Pluto

Oblasti aktivy planet

planeta	mil. km	a. j.
Merkur	0,112	0,000747
Venuše	0,615	0,00411
Země	0,930	0,00619
Mars	0,579	0,00387
Jupiter	48,1	0,322
Saturn	54,6	0,365
Uran	52,0	0,348
Neptun	86,9	0,581

Oblast aktivity Země

Měsíc se pohybuje uvnitř tzv. oblasti aktivity planety Země vzhledem k Slunci. V tomto prostoru převládá gravitační vliv Země nad rušivým působením Slunce. Planeta ruší pohyb vztahovaný ke Slunci více, než ruší Slunce pohyb vztahovaný k Zemi. Přesněji vyjádřeno oblastí aktivity Země nazýváme prostor kolem ní, ve kterém je poměr hlavního zrychlení udíleného Zemí Měsíci ku poruchovému zrychlení, vyvolávaném Sluncem větší, než poměr hlavního zrychlení získávaného od Slunce ku poruchovému zrychlení udíleného Zemí. Proto je výhodné zvolit Zemi jako centrální těleso a Slunce jako rušící.

Matematicky první poměr, zlomek můžeme vyjádřit

$$k_1 = \frac{M_Z}{M_S} \left(\frac{r_{MZ}}{r_{MS}} \right)^3 \frac{1}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}},$$

kde φ je úhel MZS. Zjednodušeně předpokládáme, že Měsíc a Země se nachází ve stejné vzdálenosti od Slunce. Druhý zlomek je dán vztahem

$$k_2 = \frac{M_S}{M_Z} \left(\frac{r_{MZ}}{r_{MS}} \right)^2.$$

Oblast aktivity Země

Slovní nerovnici zachytíme matematicky $k_1 > k_2$, úpravou obdržíme

$$r_{\text{MS}} \sqrt[5]{\frac{\left(\frac{M_Z}{M_S}\right)^2}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}}} > r_{\text{MZ}}.$$

Je zřejmé, že oblast není sférická, jde o zploštělý sféroid. Závislost na úhlu φ je slabá, proto se zjednodušeně uvádí, že oblast aktivity Země zahrnuje prostor přibližně do vzdálenosti 930 000 km od ní. Kolem Slunce se pohybuje barycentrum soustavy Země–Měsíc, což je podstatné pro správný výklad například slapů. Podrobnější rozbor vhodný pro střední školy najde čtenář v [5], [6], úplný vysokoškolský v [7].

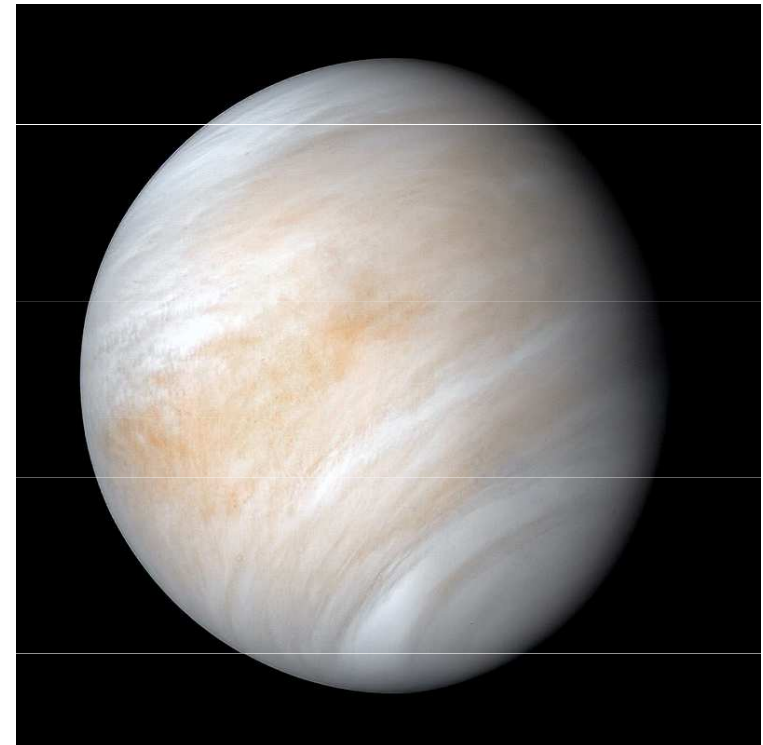
- [5] *Domanski, J., Štefl, V.*: Strefy oddziaływania planet. *Fizyka w Szkole* **43** (1997), č. 1, s. 50–51.
- [6] *Kwast, T.*: Czy Księżyc jest satelitą Zemi? *Urania* 1977, č. 6, s. 167–171.
- [7] *Chebotarev, G. A.*: Gravitational spheres of the major planets, Moon and Sun. *Soviet Astronomy* **7** (1964), č. 5, s. 618–622.

Oblast aktivity Venuše - stacionární družice

Úloha 3.9 Lze na oběžnou dráhu kolem Venuše umístit stacionární družici bez aktivního pohonu? Údaje o siderické oběžné době a hmotnosti planety vyhledejte například na adrese <http://ads.harvard.edu/books/hxaa/>. Siderická doba rotace je $T_V = 243,019$ dne a hmotnost $M_V = 6,4 \cdot 10^{23}$ kg.

Řešení: Ze vztahu $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{G\frac{M_V}{r}}}$ stanovíme $r = \left(\frac{GM_V T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1\,528\,000$ km. Oblast

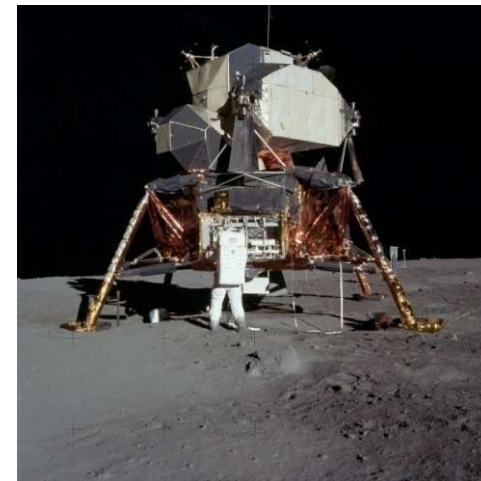
aktivity Venuše vzhledem ke Slunci má přibližný poloměr 615 000 km, tudíž družice bude velmi rychle zachycena gravitační silou Slunce.



Kosmické rychlosti

Úloha 3.1 Odvoďte vztahy a vyjádřete hodnoty pro I. II. a III. kosmickou rychlost při povrchu Země.

Řešení: Pro I. kosmickou rychlost platí $v_I = \sqrt{G \frac{M_Z}{R_Z}} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, pro II. kosmickou rychlost $v_{II} = \sqrt{2G \frac{M_Z}{R_Z}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Parabolická rychlost vzhledem ke Slunci je $v_{pS} = \sqrt{2G \frac{M_{\odot}}{r_{ZS}}} = 42,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, střední rychlost Země kolem Slunce $29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, tedy potřebujeme rychlost $12,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ na hranici oblasti přitažlivosti Země. Pro startovací rychlost ze Země platí $v = \sqrt{11,2^2 + 12,5^2} = 16,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.



Úloha 3.2 Kolikrát je I. kosmická rychlost na Zemi větší než na Měsíci? Hmotnost Země je 81krát větší než hmotnost Měsíce, poloměr Země je 3,75krát větší než poloměr Měsíce.

Řešení: Platí $\frac{v_{IZ}}{v_{IM}} = \sqrt{\frac{M_Z}{M_M} \frac{R_M}{R_Z}} = 4,65$.

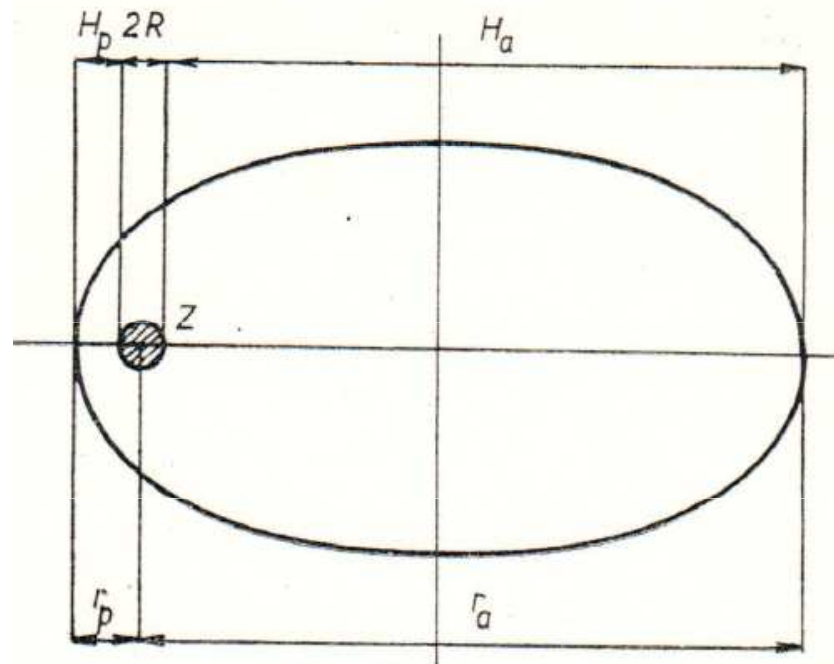
Umělé družice Země

Úloha 3.3 Pozorováním z povrchu Země byla určena rychlost pohybu umělé družice Země na kruhové oběžné dráze na $7,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. V jaké výšce nad povrchem se pohybuje?

Řešení: Pro rychlost na kruhové dráze platí vztah $v_k = \sqrt{G \frac{M_Z}{R_Z + h}}$, odtud určíme $h = 710 \text{ km}$.

Úloha 3.5 Umělá družice Země byla navedena na oběžnou kruhovou dráhu ve výšce $h = 600 \text{ km}$. Vypočtete její kruhovou rychlost v $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ s platností na dvě desetinná čísla. Určete parametry dráhy, zvýšíme-li její rychlost o $2,95 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Řešení: Pro kruhovou dráhu obdržíme $v_k = \sqrt{G \frac{M_Z}{R_Z + h}} = 7,58 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Po zvýšení rychlosti se družice dostane na eliptickou dráhu, pro velikost její hlavní poloosy a platí $a = \frac{r_p G M_Z}{2 G M_Z - r_p v_p^2} = 101\,000 \text{ km}$, odtud $H_a = 2a - (2R_Z - H_p) = 189\,000 \text{ km}$.



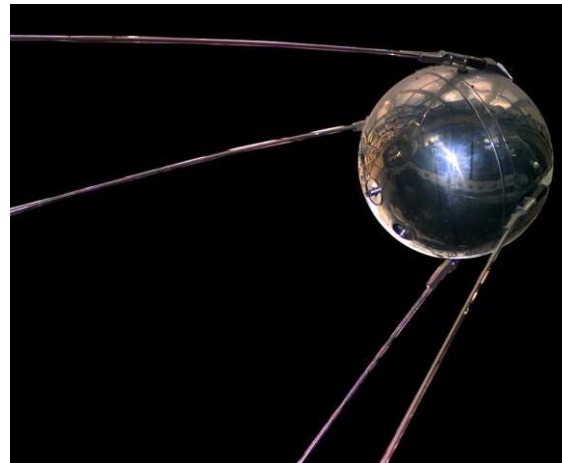
Pohyb umělé družice Země

Úloha 3.20 Na čem závisí velikost celkové mechanické energie družice pohybující se kolem Země po eliptické dráze?

Řešení: Vyjdeme ze zákona zachování energie $\frac{m_d v_p^2}{2} - G \frac{m_d M_Z}{r_p} = \frac{m_d v_a^2}{2} = G \frac{m_d M_Z}{r_a}$ a zákona zachování momentu hybnosti $m_d r_p v_p = m_d r_a v_a$. Řešením rovnic obdržíme vztah pro celkovou mechanickou energii $W_c = -G \frac{m_d M_Z}{r_p + r_a} = -G \frac{m_d M_Z}{2a}$, která závisí na velikosti velké poloosy.

Úloha 3.21 Družice o hmotnosti $m_d = 10^3$ kg se pohybuje po kruhové oběžné dráze nad povrchem Země ve výšce $h = 10^3$ km. Jaká je její kinetická, potenciální a celková energie? Údaje o hmotnosti a poloměru Země naleznete v tabulkách <http://ads.harvard.edu/books/hsaa/>.

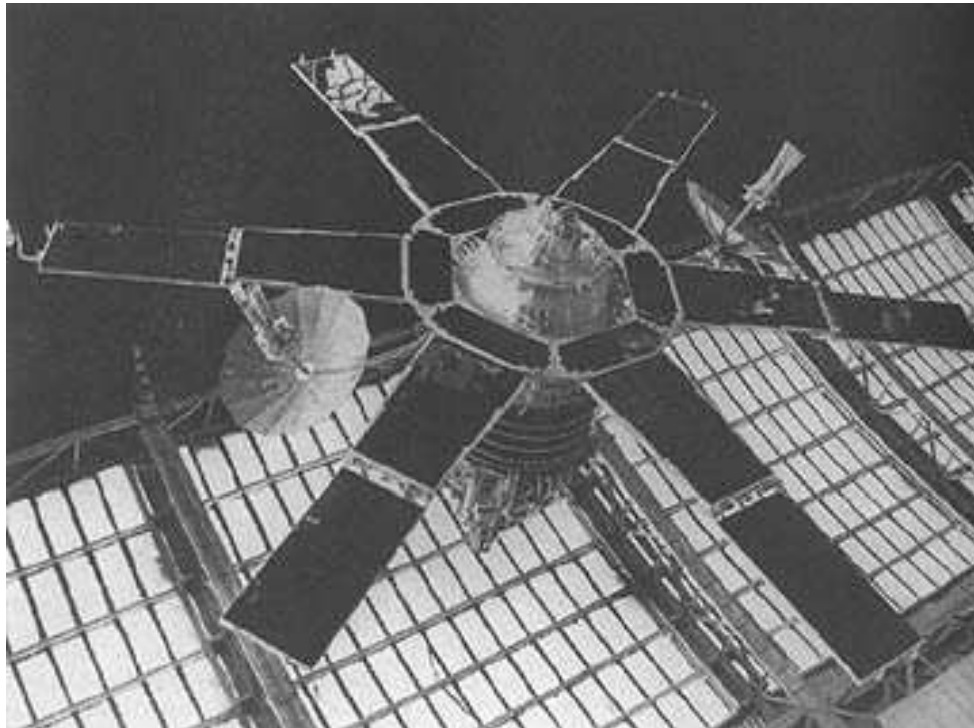
Řešení: Nejprve stanovíme velikost kruhové rychlosti družice $v_k = \sqrt{G \frac{M_Z}{R_Z + h}}$, po dosazení obdržíme $v_k = 7,34 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pro kinetickou energii obdržíme $W_k = \frac{1}{2} m_d v_k^2 = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ J}$, pro potenciální energii $W_p = -G \frac{m_d M_Z}{R_Z + h} = -5,4 \cdot 10^{10} \text{ J}$. Připomínáme, že platí viriálová věta $\langle W_k \rangle = -\frac{1}{2} \langle W_p \rangle$.



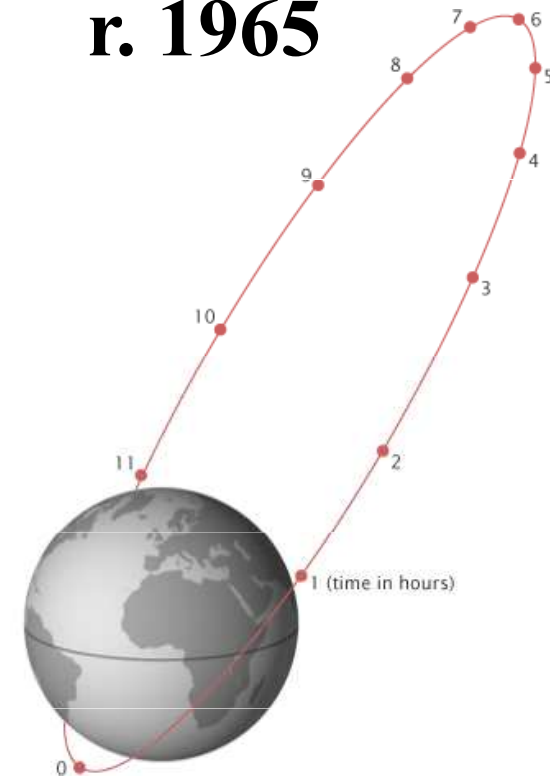
Umělá družice Molnija

Úloha 3.4 Jedna ze spojových družic série Molnija měla po vypuštění následující parametry oběžné dráhy: výšku perigea $H_p = 500$ km a výšku apogea $H_a = 40\,000$ km. Vypočtete rychlost družice v perigeu a apogeu.

Řešení: Nejprve stanovíme $r_a = R_Z + H_a = 4,64 \cdot 10^7$ m a $r_p = R_Z + H_p = 6,9 \cdot 10^6$ m, pro velikost hlavní poloosy platí $a = \frac{r_a + r_p}{2} = 2,67 \cdot 10^7$ m. Rychlost v apogeu určíme ze vztahu $v_a = \sqrt{GM_Z \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} = 1,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ a v perigeu $v_p = \sqrt{GM_Z \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} = 10,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.



r. 1965



Umělá družice Měsíce - Lunar Orbiter 1

Úloha 3.22 Určete rychlost družice Orbiter 1 v periseleniu a aposeleniu, jestliže její střední výška nad povrchem Měsíce byla $h = 1027$ km a excentricita dráhy $\varepsilon = 0,298$. Údaje o Měsíci, jeho hmotnosti a poloměru najdete v tabulkách <http://ads.harvard.edu/books/hxaa/>.

Řešení: Pro rychlost na kruhové dráze platí $v_k = \sqrt{G \frac{M_M}{R_M + h}} = 1,33 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pro rychlost v periseleniu platí $v_{\text{per}} = v_k \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = 1810 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a pro rychlost v aposeleniu $v_{\text{apos}} = v_k \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = 978 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

r. 1966



Soustava Země - Měsíc - Slunce

Úloha 3.10 Které těleso, Země nebo Slunce, působí větší gravitační silou na Měsíc? Proveďte diskusi, proč Měsíc obíhá kolem Země a nikoliv kolem Slunce. $M_{\odot} = 330000 M_Z$, $r_{MS} = 390 r_{MZ}$.

Řešení: Platí $\frac{F_{MS}}{F_{MZ}} = \frac{G \frac{M_M M_{\odot}}{r_{MS}^2}}{G \frac{M_M M_Z}{r_{MZ}^2}} = 2,17$. Kolem Slunce obíhá barycentrum soustavy Země

– Měsíc.

Úloha 3.11 Určete poměr slapových působících na Zemi, vyvolaných Sluncem a Měsícem. Jak by se situace změnila, jestliže by se hypoteticky vzdálenost Měsíce zvětšila 2krát. Nezbytné číselné údaje o hmotnostech těles a jejich vzdálenostech naleznete v tabulkách.

Řešení: Vztah pro slapovou sílu, kde Země je rušené kosmické těleso a Měsíc respektive Slunce jsou rušícími, je dán vztahem $F = \frac{2GM_Z M_{\text{rušící}} R_Z}{r^3}$, kde r je vzdálenost středů obou uvažovaných kosmických těles. Připomínáme, že vztah udává převrácenou kubickou závislosti s mnohem rychlejším poklesem síly. Po dosazení číselných hodnot obdržíme pro velikost působících slapových sil Měsíce na Zemi $F_{MZ} = 6,7 \cdot 10^{18}$ N a Slunce na Zemi $F_{SZ} = 3,0 \cdot 10^{18}$ N. Tedy prvně počítané slapové působení činí 2/3 a druhé 1/3 z celkového slapového působení obou kosmických těles. Slapové síly vyvolávané Měsícem jsou přibližně 2,2krát větší než slapové síly Slunce. Jinak vyjádřeno slapové síly vytvářené Sluncem dosahují přibližně pouze 46% slapových sil Měsíce. Při hypotetickém zvětšení vzdálenosti Měsíce 2krát, by jeho slapové působení pokleslo 8krát a stalo by se 4krát slabší než slapové působení od Slunce.

Soustava Země - Měsíc

Úloha 3.13 Jak bychom hypoteticky museli změnit hmotnost Země, aby Měsíc obíhal ve stejné vzdálenosti kolem Země s oběžnou dobou 3krát menší?

Řešení: Použijeme III. Keplerův zákon v přesném znění $\frac{T_0^2(M_{Z0}+M_M)}{T_1^2(M_{Z1}+M_M)} = \frac{a_0^3}{a_1^3}$, kde hmotnost M_M Měsíce zanedbáváme, M_{Z1} je změněná hmotnost Země. Úpravou vztahu obdržíme $\frac{T_0^2 M_{Z0}}{(\frac{1}{3}T_0)^2 M_{Z1}} = 1 \Rightarrow M_{Z1} = 9M_{Z0}$.

Soustava Slunce - Země

Úloha 3.14 Jaká by musela být hmotnost Slunce, aby Země obíhající kolem něho se stejnou oběžnou dobou, se nacházela ve dvojnásobné vzdálenosti?

Řešení: Dosadíme do rovnice vyjadřující, že dostředivé zrychlení je vytvářeno silou přitažlivosti Slunce $G \frac{M_{\odot 0} M_Z}{r_{SZ}^2} = \frac{M_Z v_Z^2}{r_{SZ}}$, kde $\frac{M_Z v_Z^2}{r_{SZ}} = \frac{M_Z \left(\frac{2\pi r_{SZ}}{T_Z}\right)^2}{r_{SZ}}$. Obdobně v případě hypotetického

přesunu na dvojnásobnou vzdálenost platí $G \frac{M_{\odot 1} M_Z}{(2r_{SZ})^2} = \frac{M_Z \left(\frac{2\pi 2r_{SZ}}{T_Z}\right)^2}{2r_{SZ}}$. Podělením druhé rovnice první obdržíme po úpravě $M_{\odot 1} = 8M_{\odot 0}$.

Soustava Země – Měsíc

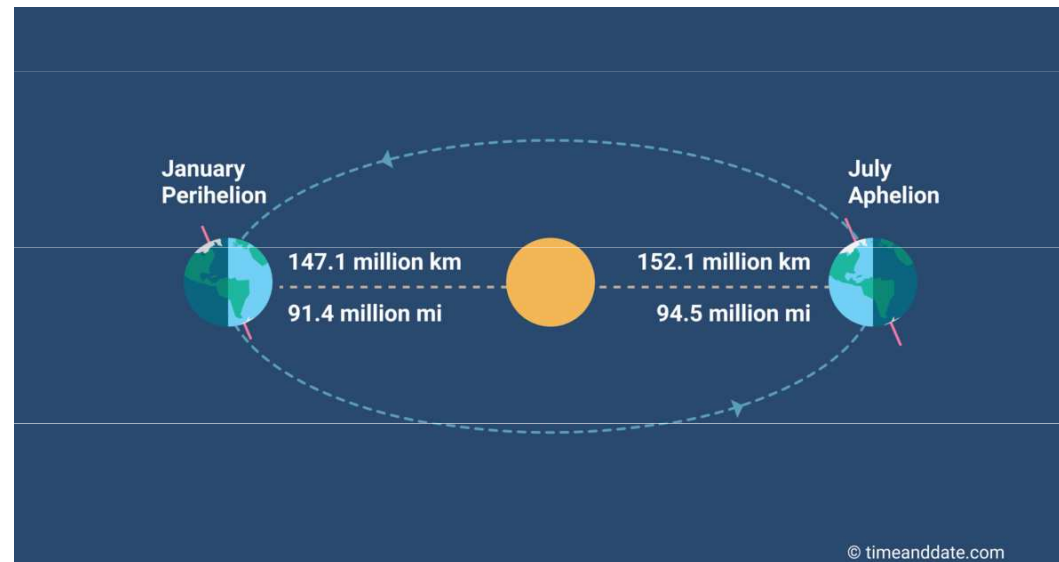
Úloha 3.12 Síly přílivového tření vyvolané především měsíčními slapy zpomalují rotaci Země. Tento proces bude pokračovat, dokud úhlová rychlost rotace Země nebude rovna úhlové rychlosti oběžného pohybu Měsíce kolem Země. Určete vzdálenost Měsíce od Země a_{kon} a jeho oběžnou dobu T_{kon} při této tzv. oboustranné vázané rotaci obou těles při předpokládaném lineárním vzdalování Měsíce od Země. Rotační moment hybnosti Měsíce na počátku a konci uvažovaného procesu jakož i Země v konečném stavu budeme zanedbávat. Pro zjednodušení dále předpokládejme, že rotační osa Země je kolmá k oběžné rovině měsíční dráhy. Rotační moment hybnosti Země v současnosti je $L_{Z\text{rot}} = 6 \cdot 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, moment setrvačnosti Země $J_Z = 8 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, předpokládáme znalost r_{ZM} , M_M , $T_{\text{poč}}$.

Řešení: V izolované soustavě, za kterou můžeme zjednodušeně považovat soustavu Země – Měsíc, platí zákon zachování momentu hybnosti. Pro počáteční a koncový stav platí $L_{c1} = L_{c2}$. Z platnosti podmínek v zadání vyplývá $L_{c1} = L_{Z\text{rot}} + L_{M\text{poč}}$ a $L_{c2} = L_{M\text{drah}}$. Moment setrvačnosti Měsíce vzhledem k rotační ose Země je $J_{M\text{poč}} = M_M a_{\text{poč}}^2 = 1,08 \cdot 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, jeho současná dráhová úhlová rychlost $\omega_{\text{poč}} = \frac{2\pi}{T_s} = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Dráhový moment hybnosti Měsíce nyní $L_{Mh\text{poč}} = J_{M\text{poč}} \omega_{\text{poč}} = 2,9 \cdot 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Počáteční celkový moment hybnosti je $L_{c1} = L_{Z\text{rot}} + L_{M\text{poč}} = 3,5 \cdot 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Aplikujeme zákon zachování momentu hybnosti $L_{c1} = L_{c2}$, kde $L_{c2} = M_M a_{\text{kon}}^2 \omega_{\text{kon}}$. Dále platí III. Keplerův zákon upravený do tvaru $a_{\text{poč}}^3 \omega_{\text{poč}}^2 = a_{\text{kon}}^3 \omega_{\text{kon}}^2$. Po dosazení a úpravách obdržíme $a_{\text{kon}} = a_{\text{poč}} \left(\frac{L_{c2}}{L_{M\text{poč}}} \right)^2 = 1,45 a_{\text{poč}} = 5,6 \cdot 10^8 \text{ m}$. Rovněž z III. Keplerova zákona získáme konečnou úhlovou rychlost $\omega_{\text{kon}} = \omega_{\text{poč}} \left(\frac{a_{\text{poč}}}{a_{\text{kon}}} \right)^{\frac{3}{2}} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ s konečnou oběžnou dobou $T_{\text{kon}} = T_{\text{poč}} \frac{\omega_{\text{poč}}}{\omega_{\text{kon}}} = 48 \text{ dnů}$.

Slunce – úbytek hmotnosti

Úloha 3.15 Úbytek hmotnosti Slunce vyvolaný jeho vyzařováním činí za 1 s $4,3 \cdot 10^9$ kg, ročně $6,7 \cdot 10^{-14} M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$, úbytek vyvolaný slunečním větrem $10^{-14} M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$. Jak se změní poloměr dráhy Země kolem Slunce v důsledku těchto jevů? Zjednodušeně předpokládejme kruhový tvar dráhy Země.

Řešení: Dosadíme do rovnice vyjadřující zákon zachování mechanické energie pro pohyb Země $\frac{1}{2}M_Z v_{Z0}^2 - G \frac{M_Z M_{\odot 0}}{r_{ZS0}} = \frac{1}{2}M_Z v_{Z1}^2 - G \frac{M_Z M_{\odot 1}}{r_{ZS1}}$. Při zjednodušení na kruhovou dráhu dostáváme $G \frac{M_Z M_{\odot}}{r_{ZS}^2} = \frac{M_Z v_Z^2}{r_{ZS}} \Rightarrow v_{ZS}^2 = G \frac{M_{\odot}}{r_{ZS}}$. Následně dosadíme do rovnice pro zákon zachování energie $\frac{1}{2} \frac{GM_Z M_{\odot 0}}{r_{ZS0}} - \frac{GM_Z M_{\odot 0}}{r_{ZS0}} = \frac{1}{2} \frac{GM_Z M_{\odot 1}}{r_{ZS1}} - \frac{GM_Z M_{\odot 1}}{r_{ZS1}}$. Po úpravě obdržíme $\frac{M_{\odot 1}}{M_{\odot 0}} = \frac{r_{ZS1}}{r_{ZS0}}$. Po dělení čitatele Δt , zvolíme $\Delta t = 1 \text{ rok}$, $r_{ZS0} = 1 \text{ AU}$ získáme vztah $\frac{\Delta M_{\odot 0}}{M_{\odot 0}} = \frac{\Delta r_{ZS0}}{r_{ZS0}} \Rightarrow \frac{\Delta r_{ZS0}}{\Delta t} = 8 \cdot 10^{-14} r_{ZS0} \cdot \text{rok}^{-1}$. Přepočtením získáme $\frac{\Delta r_{ZS0}}{\Delta t} = 1 \text{ cm} \cdot \text{rok}^{-1}$.



Halleyova kometa – dráha

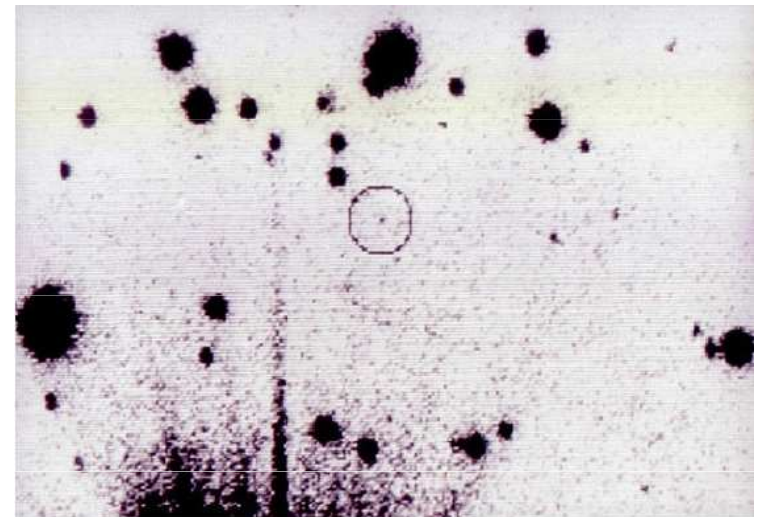
Úloha 3.16 Kometa prošla perihéliem ve vzdálenosti $r = 0,587$ AU rychlostí $v = 54,52$ km·s⁻¹. Po jaké dráze se pohybuje, určete její parametry.

Řešení: Ke stanovení typu dráhy určíme kruhovou a parabolickou rychlost v dané vzdálenosti od Slunce, $v_k = \sqrt{GM_\odot/r} = 38,87$ km·s⁻¹, $v_p = \sqrt{2GM_\odot/r} = 54,96$ km·s⁻¹. Protože platí $v_k < v < v_p$, kometa se pohybuje po eliptické dráze. Ze vztahu pro rychlost komety v perihéliu $v = \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)}$ vyjádříme velikost velké poloosy $a = 18$ AU. Oběžnou dobu stanovíme z III. Keplerova zákona $T = a\sqrt{a} = 76$ roků. Excentricitu vypočítáme $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{a-r}{a} = 0,967$. Rychlost komety v aféliu je rovna $v_a = \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} = 0,9$ km·s⁻¹.

1986 přísluní



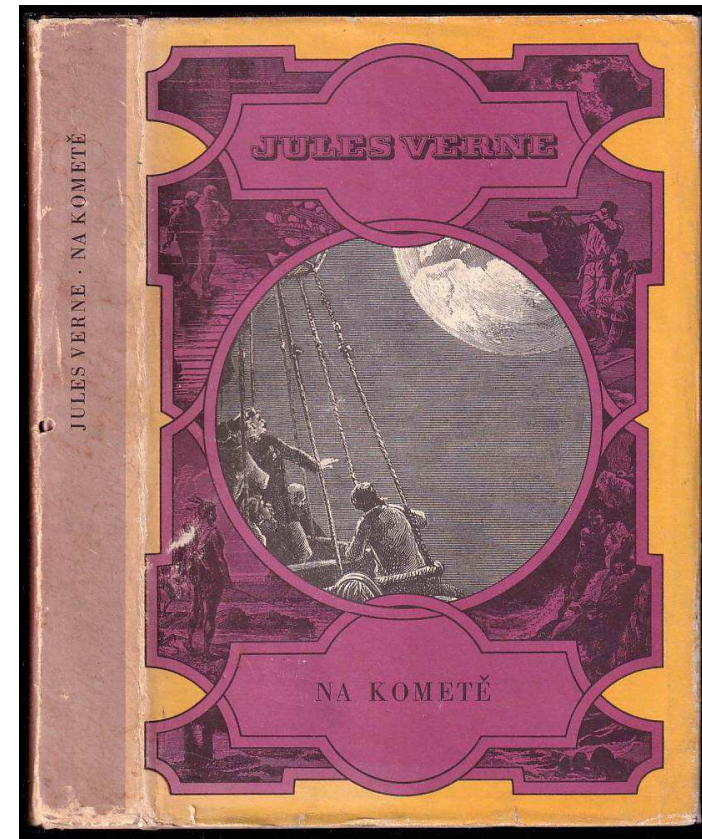
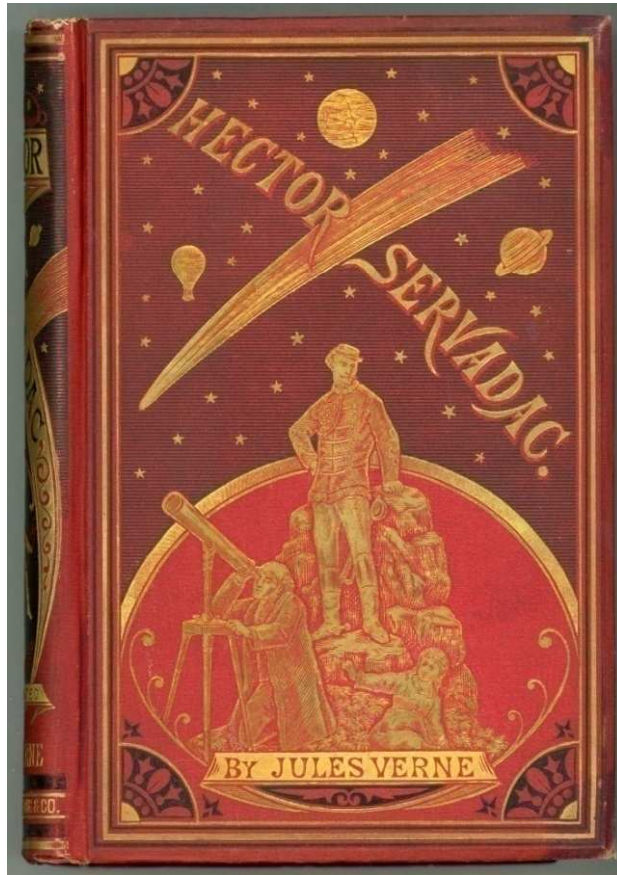
11 au od Země



Jules Verne Na kometě

Úloha 3.17 V román Julese Vernea Hector Servadac (u nás známého pod názvem Na kometě) se autor zmiňuje o planetce Galia s oběžnou dobou $T_G = 2$ roky a vzdáleností v aféliu 820 000 000 km. Může se planetka pohybovat po takové dráze?

Řešení: Platí III. Keplerův zákon $\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_G^3}{T_G^2}$. Při předpokládané oběžné době 2 roky je velikost hlavní poloosy dráhy $a_G = 1,59$ AU. Planetka s těmito parametry nemůže existovat.

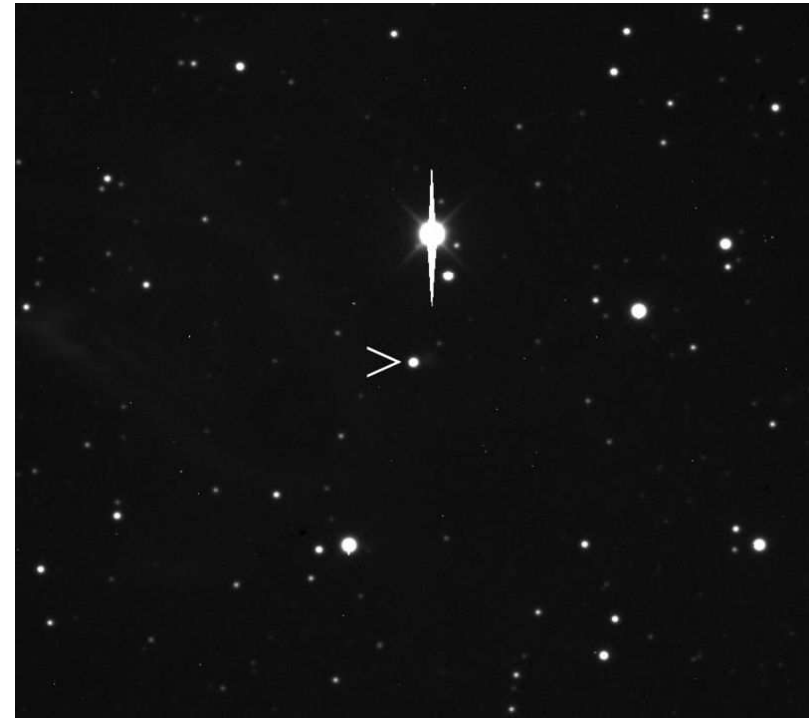
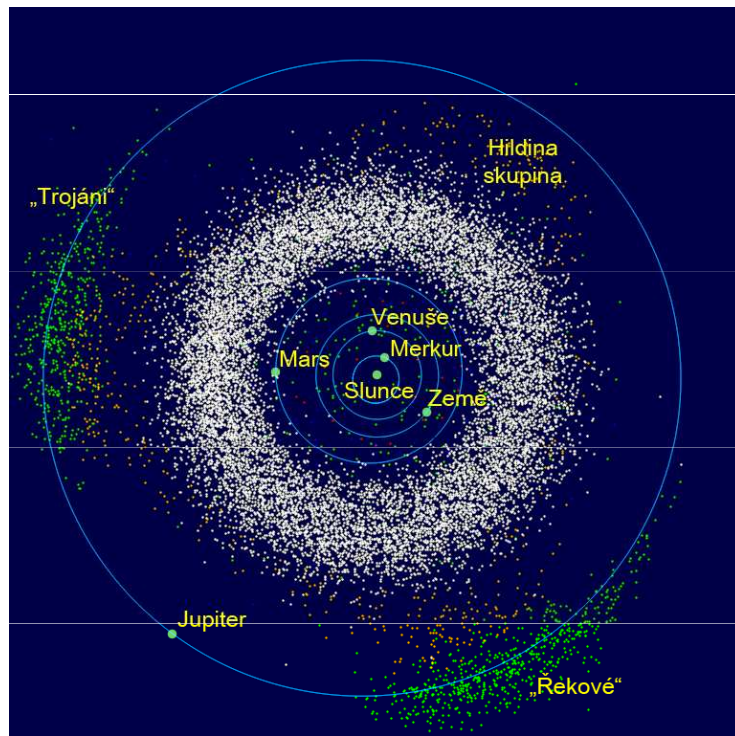


Planetka Hektor

Úloha 3.18 Vypočítejte rychlost planetky Hektor v perihéliu a aféliu, jestliže její kruhová rychlost se blíží $13,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ a excentricita její dráhy je $\varepsilon = 0,024$. Přibližně na jaké střední heliocentrické vzdálenosti se planetka nachází?

Řešení: Pro rychlost v perihéliu platí $v_{\text{per}} = v_k \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = 13,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, pro rychlost v aféliu $v_{\text{afél}} = v_k \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = 12,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Pro kruhovou dráhu platí vztah $v_k = \frac{29,8}{\sqrt{r}}$, kde rychlost je $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ a r v AU. Dosazením obdržíme $r = 5,17 \text{ AU}$.

planetka ze skupiny Trojanů, v L4,



Škálové výšky v atmosféře Země

Úloha 2.7 Určete tlakové škálové výšky pro kyslík a dusík v atmosféře Země, předpokládejte $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a průměrnou teplotu 280 K.

Řešení: Tlaková škálová výška je pro kyslík $m = 32 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ rovna $H = kT/(gm) = 7,4 \text{ km}$. V případě dusíku $m = 28 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ obdržíme $H = kT/(gm) = 8,4 \text{ km}$.

Úloha 2.8 Nejvyšší hora na Zemi Mount Everest má výšku $h = 8848 \text{ m}$ nad úrovní moře. Horolezci k jejímu zdolání zpravidla používají kyslíkové přístroje. Zdůvodněte proč, stanovte koncentraci kyslíku n na vrcholu hory. Střední teplotu atmosféry Země v této vrstvě atmosféry pokládáme rovnou 280 K.

Řešení: Škálová tlaková výška je pro kyslík při molekulové hmotnosti $m = 32 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ rovna $H = kT/(gm) = 7,4 \text{ km}$. U ideálního plynu $n \sim p$. Platí $p(h)/p(h_0) = \exp(-h/H) = 0,3$. Koncentrace kyslíku je na vrcholu Mount Everestu rovna přibližně 1/3 hodnoty u mořské hladiny.

Úloha 2.9 Keckovy dalekohledy byly postaveny na vrcholu hory Mauna Kea na Havaji ve výšce $h = 4100 \text{ m}$ nad úrovní moře v místě s průměrnou teplotou $T = 280 \text{ K}$. Jedním z důvodů tohoto umístění je snížený obsah vodních par v této výšce, tudíž zlepšení podmínek pro pozorování. Tento úsudek doložte výpočtem.

Řešení: U vodních par je tlaková škálová výška při $m = 18 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $H = kT/(gm) = 12,9 \text{ km}$. Pro ideální plyn $n \sim p$. Vypočteme $p(h)/p(h_0) = \exp(-h/H) = 0,73$.

Efektivní teplota rovnovážného záření planet

Úloha 2.11 Určete efektivní teplotu rovnovážného záření Země, jestliže je známo Bondovo albedo Země $A = 0,30$, efektivní povrchová teplota Slunce $5\,780\text{ K}$, poloměr Slunce $7 \cdot 10^8\text{ m}$ a vzdálenost Slunce – Země $a_{SZ} = 1\text{ AU} = 1,5 \cdot 10^{11}\text{ m}$. Albedo definujeme jako poměr velikosti záření rozptýleného povrchem koule do všech směrů k celkovému množství záření, jež dopadá na povrch při rovnoběžném svazku záření.

Řešení: Pro zářivý výkon povrchu Země platí $4\pi R_Z^2 \sigma T_{\text{efZ}}^4$, Země absorbuje od Slunce zářivý výkon $(1 - A)4\pi R_\odot^2 \sigma T_{\text{ef}\odot}^4 \pi R_Z^2 / (4\pi a_{SZ}^2)$. Předpokládáme, že tok záření je u Země absorbován plochou πR_Z^2 , ale vyzařován plochou $4\pi R_Z^2$ vzhledem k relativně rychlé rotaci Země. Po úpravě obdržíme $T_{\text{efZ}} = T_{\text{ef}\odot} \left(\frac{R_\odot}{2a_{SZ}} \right)^{1/2} (1 - A)^{1/4} = 255\text{ K}$. Atmosférická teplota je vzhledem ke skleníkovému efektu vyšší, dosahuje zhruba 290 K .

Úloha 2.12 Stanovte efektivní teplotu rovnovážného záření Marsu, známe Bondovo albedo Marsu $A = 0,25$, efektivní povrchovou teplotu Slunce $5\,780\text{ K}$, poloměr Slunce $7 \cdot 10^8\text{ m}$ a vzdálenost Slunce – Mars $a_M = 1,52\text{ AU} = 2,28 \cdot 10^{11}\text{ m}$.

Řešení: U Marsu použijeme stejnou úvahu jako u Země, $T_{\text{efM}} = T_{\text{ef}\odot} \left(\frac{R_\odot}{2a_M} \right)^{1/2} (1 - A)^{1/4} = 210\text{ K}$.

Úloha 2.13 Hodnota solární konstanty pro Zemi je ve vzdálenosti 1 AU od Slunce $1\,370\text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Určete hodnotu solární konstanty pro Jupiter, který obíhá v průměrné vzdálenosti $5,2\text{ AU}$ od Slunce. Stanovte celkový přijímaný zářivý výkon od Slunce, který získává Jupiter, jestliže Bondovo albedo planety je $0,70$.

Řešení: Solární konstanta Jupitera je $S_J = S_Z / 5,2^2 = 51\text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Celkový přijímaný zářivý výkon je $L_{\odot \rightarrow J} = S_J \pi R_J^2 (1 - A) = 2,4 \cdot 10^{17}\text{ W}$.

Efektivní teplota rovnovážného záření planet

Úloha 2.14 Oběžná doba planety Icarus obíhající kolem Slunce po eliptické dráze je 1,12 roku, excentricita její dráhy je 0,83. Určete vzdálenost planety od Slunce v perihéliu a aféliu, stanovte efektivní teplotu rovnovážného záření planety ve zmíněných bodech její dráhy při znalosti Bondova albeda $A = 0,1$.

Řešení: Nejprve určíme velikost velké poloosy, následně perihéliovou a aféliovou vzdálenost. Z $T^2 = a^3 \Rightarrow a = 1,08 \text{ AU}$, $r_p = a(1 - e) = 0,19 \text{ AU}$, $r_a = a(1 + e) = 1,97 \text{ AU}$. Efektivní teplotu stanovíme obdobně jako u úloh 2.12, 2.13, $T_{\text{ef, p}} = 624 \text{ K}$, $T_{\text{ef, a}} = 194 \text{ K}$.

Úloha 2.15 Ze spektroskopických studií Neptuna v infračerveném oboru kosmickou sondou Voyager 2 byla stanovena teplota planety na 56 K. Dokažte, že Neptun má vnitřní zdroje energie, jestliže Bondovo albedo je $A = 0,29$, střední vzdálenost od Slunce je $a_{\text{Ne}} = 30 \text{ AU}$.

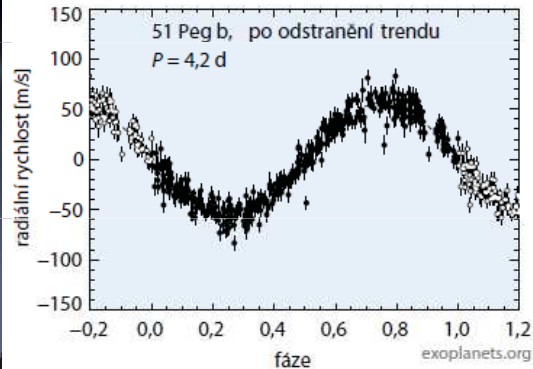
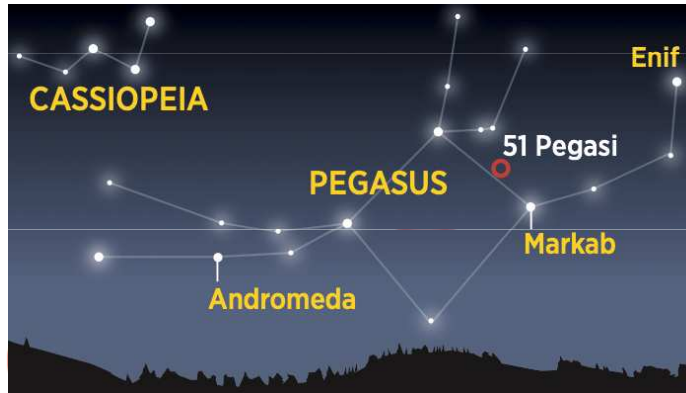
Řešení: Nejprve určíme hodnotu solární konstanty Neptuna $S_{\text{Ne}} = S_Z/30^2 = 1,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Planetou získávaný zářivý výkon od Slunce je $L_{\odot \rightarrow \text{Ne}} = S_{\text{Ne}} \pi R_{\text{Ne}}^2 (1 - A) = 2 \cdot 10^{15} \text{ W}$. Efektivní teplota rovnovážného záření planety je $T_{\text{ef, Ne}} = \left(\frac{L_{\odot \rightarrow \text{Ne}}}{4\pi\sigma R_{\text{Ne}}^2} \right)^{1/4} = 46 \text{ K}$. Spektroskopicky zjištěná teplota je vyšší, Neptun má vnitřní zdroje energie.

Atmosféra Merkur x Titan

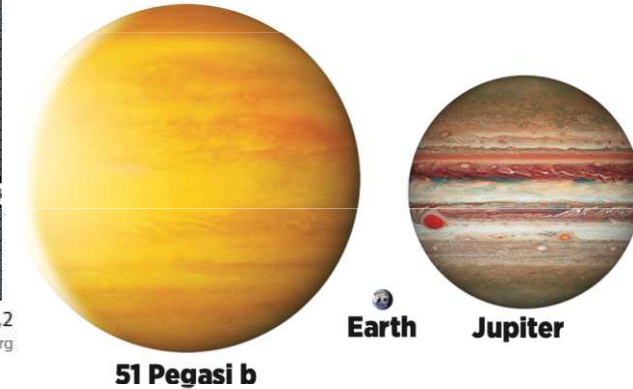
Úloha 2.20 Objasněte, proč měsíc Saturna Titan si zachoval svoji atmosféru zatímco Merkur nikoliv. Maximální teplota v dusíkové atmosféře Titanu je 100 K, na povrchu Merkuru až 800 K.

Řešení: K dlouhodobému udržení atmosfér kosmických těles musí být splněna zhruba podmínka $v_p \geq 10v_{sk}$ (kde v_p je parabolická rychlost, v_{sk} je střední kvadratická rychlost molekul plynu), tedy $\left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2} \geq 10\left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2}$. Mariner 10 v roce 1974 bezúspěšně hledal u Merkuru případnou tenkou vrstvu atmosféry z hélia. Pro tento prvek platí $v_p/v_{sk} = 4,2/2,1 = 2$, atmosféra by tak mohla existovat pouze několik dnů. Titan má atmosféru složenou převážně z molekulárního dusíku. Po dosazení obdržíme $v_p/v_{sk} = 2,7/0,3 = 9$, tedy podmínka pro dlouhodobou existenci atmosféry je téměř splněna.

Exoplanety – první



Obr. 1 Křivka radiálních rychlostí hvězdy 51 Pegasi.



Přednáška u příležitosti udělení Nobelovy ceny za fyziku za rok 2019

© The Nobel Foundation 2019

Didier Queloz + **Michel Mayor**

Cavendish Laboratory, University of Cambridge, Cambridge CB3 0HE, Spojené království a Department of

V roce 1952 publikoval Struve [4] překvapující vizionářskou poznámku, v níž se zmiňoval o využití „vysoce přesného měření radiální rychlosti“ k pátrání po planetách „mnohem blíže k jejich mateřským hvězdám, než je tomu ve Sluneční soustavě“. Tato myšlenka daleko předběhla svoji dobu, dokud celá řada inovací výrazně neredukovala nejistoty v měření radiálních rychlostí. Až do následující dekády tehdy nikdo vážně neuvažoval o pátrání po planetách pomocí dopplerovské spektroskopie.



Obr. 1 Spektrograf ELODIE na observatoři OHP. Na levé straně je difrakční mřížka typu échelle. Optická vlákna (červená) přivádí signál do spektrometru. Nahoře je kryostat, v němž je umístěn CCD detektor. Optika se zkříženou disperzí je umístěna ve střední vertikální černé části.

Exoplanety

Spektrograf byl navržen k přesným měřením metodou dopplerovské spektroskopie. Optická koncepce byla dána požadavkem na kompaktní, stabilní přístroj a na maximální využití celé dostupné plochy (1024×1024 pixelů) CCD detektoru E2V k získání spekter s nejvyšším možným rozlišením v celém rozsahu viditelného spektra – od 390 nm do 681 nm. To bylo umožněno použitím velké stupňovité difrakční mřížky typu échelle, vyrobené firmou Milton and Roy. Ke zvýšení stability osvětlení mřížky byl na vstupu do optického vlákna použit dvojitý *scrambler*. Navíc byla ELODIE vybavena softwarem pro zpracování dat (*pipeline*) redukcujícím data tak, aby krátce po pozorování již byla k dispozici radiální rychlost prostřednictvím numerické korelační metody [16].

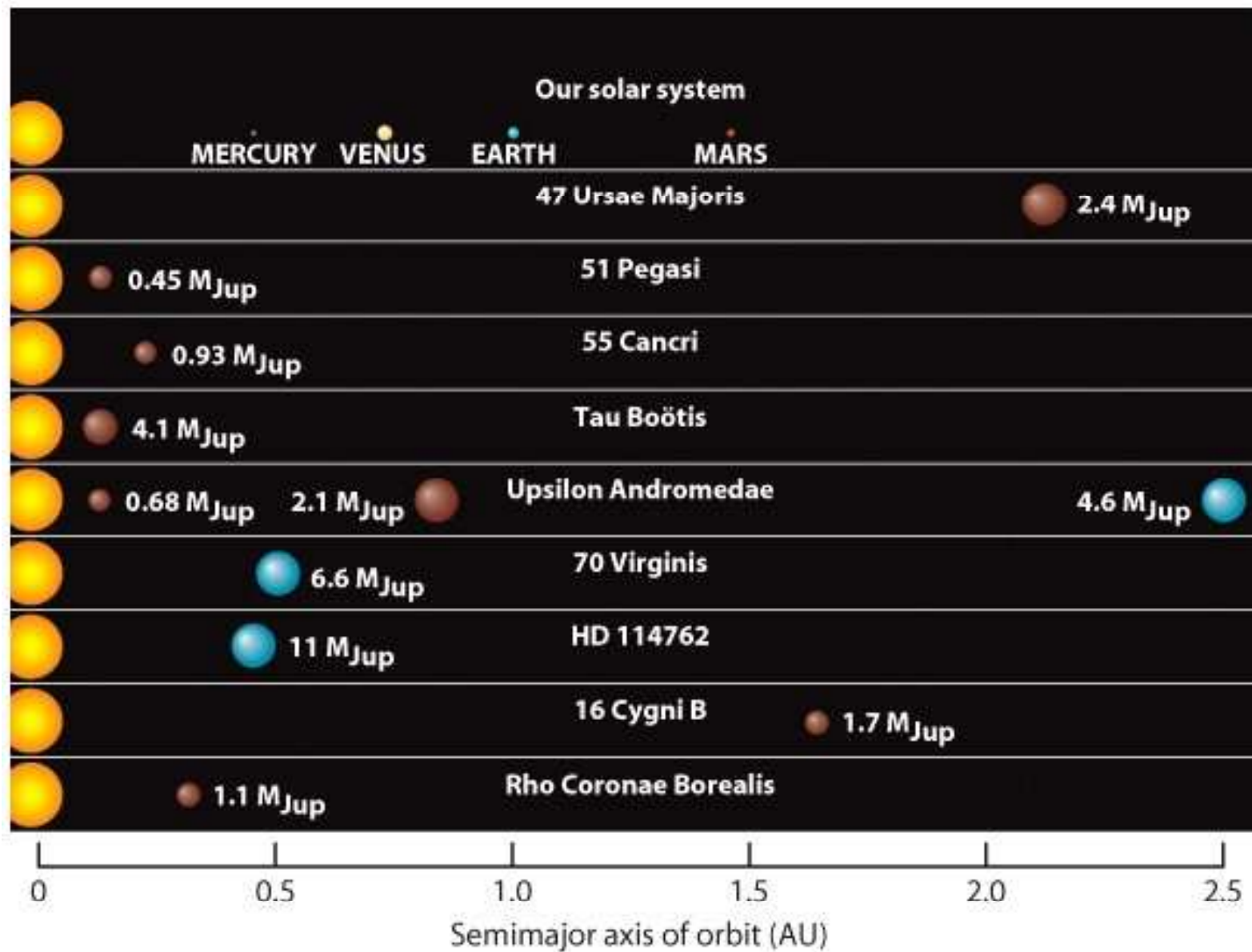


Obr. 2 Střední část hvězdného spektra zaznamenaného CCD detektorem ELODIE, spolu se spektrem thoria. Zakřivená posloupnost spektroskopických řádů spekter spolu s emisním spektrem thoriové lampy ozařující druhé optické vlákno.

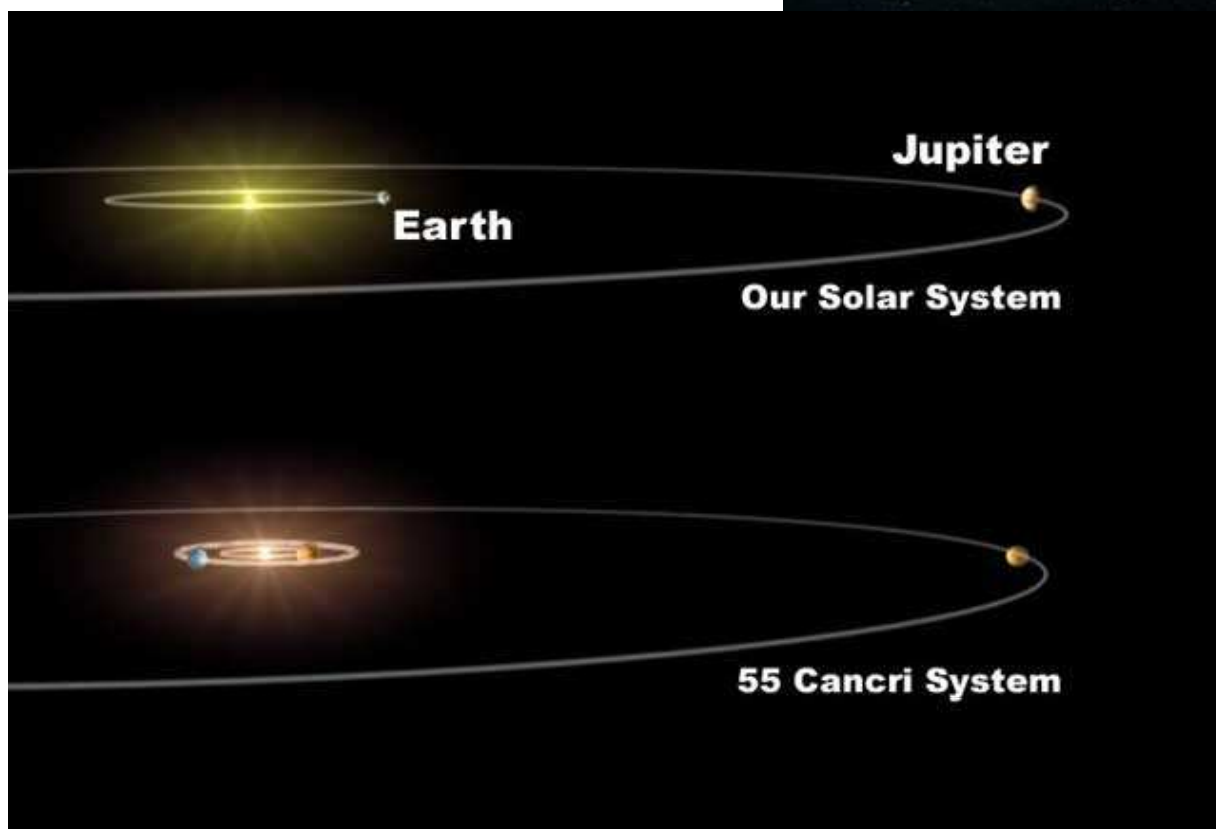
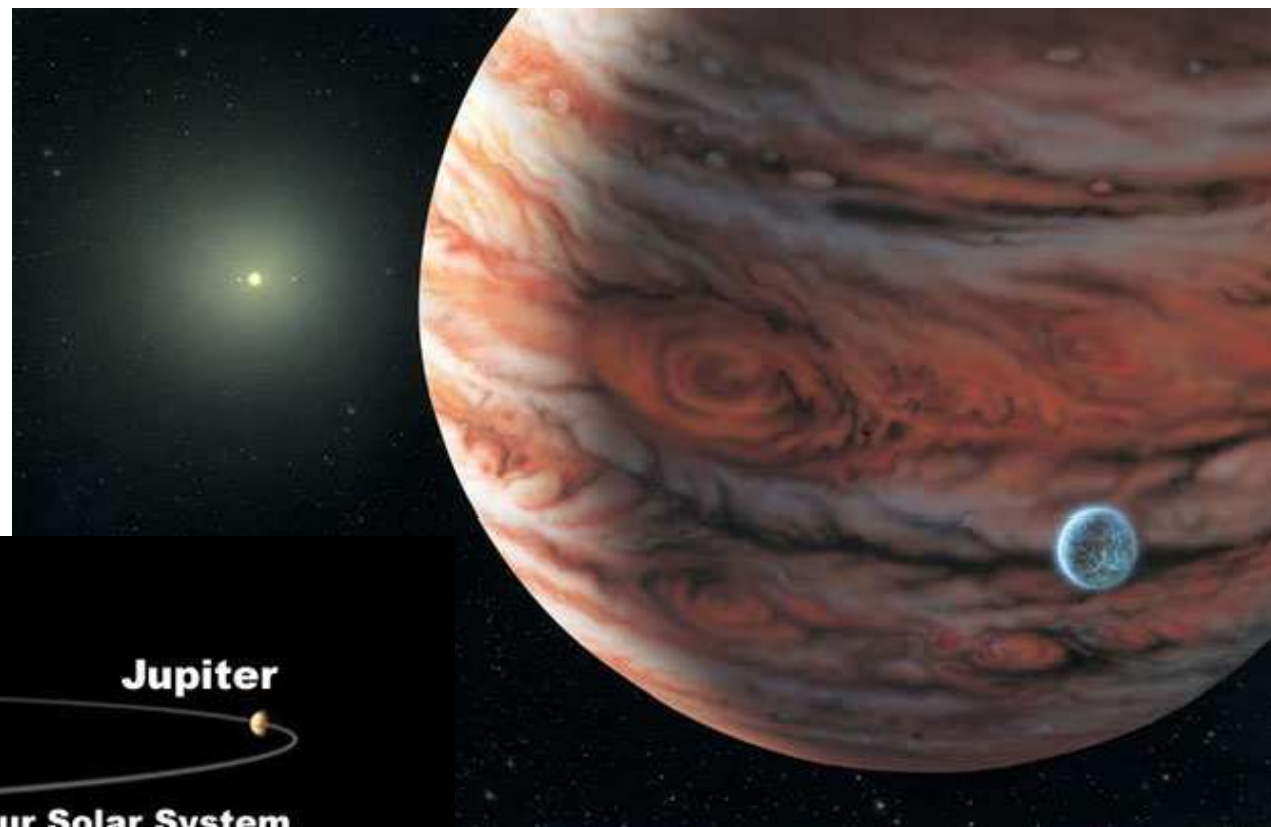
Sluší se říci, že v lednu 1995 byla moje první reakce poněkud panická, když jsem si uvědomil, že hvězda HD217014 vykazuje větší změny radiální rychlosti, než by vyplývalo pouze z přesnosti dopplerovských měření, jakou jsem z dostupných spektroskopických informací očekával. Myslel jsem si, že jde o nějakou chybu ve spektrografu nebo v analýze dat. Po dnech a nocích, které jsem s úzkostí strávil sám kontrolou všech součástí a možných chyb softwaru, jsem po získání dalších dat došel k jedinému možnému závěru, který by mohl kolísání rychlosti vysvětlit: kolem hvězdy 51 Peg obíhá planeta o hmotnosti Jupitera s periodou 4,25 dne, což odpovídá orbitální vzdálenosti 0,05 astronomické jednotky. Planeta je doslova „upečená“ a její atmosféra má teplotu 1 000 K. Když o tom zpětně přemýšlím, uvědomuji si, jaká to byla odvážná a pošetilá představa: privilegium nadšeného doktoranda.



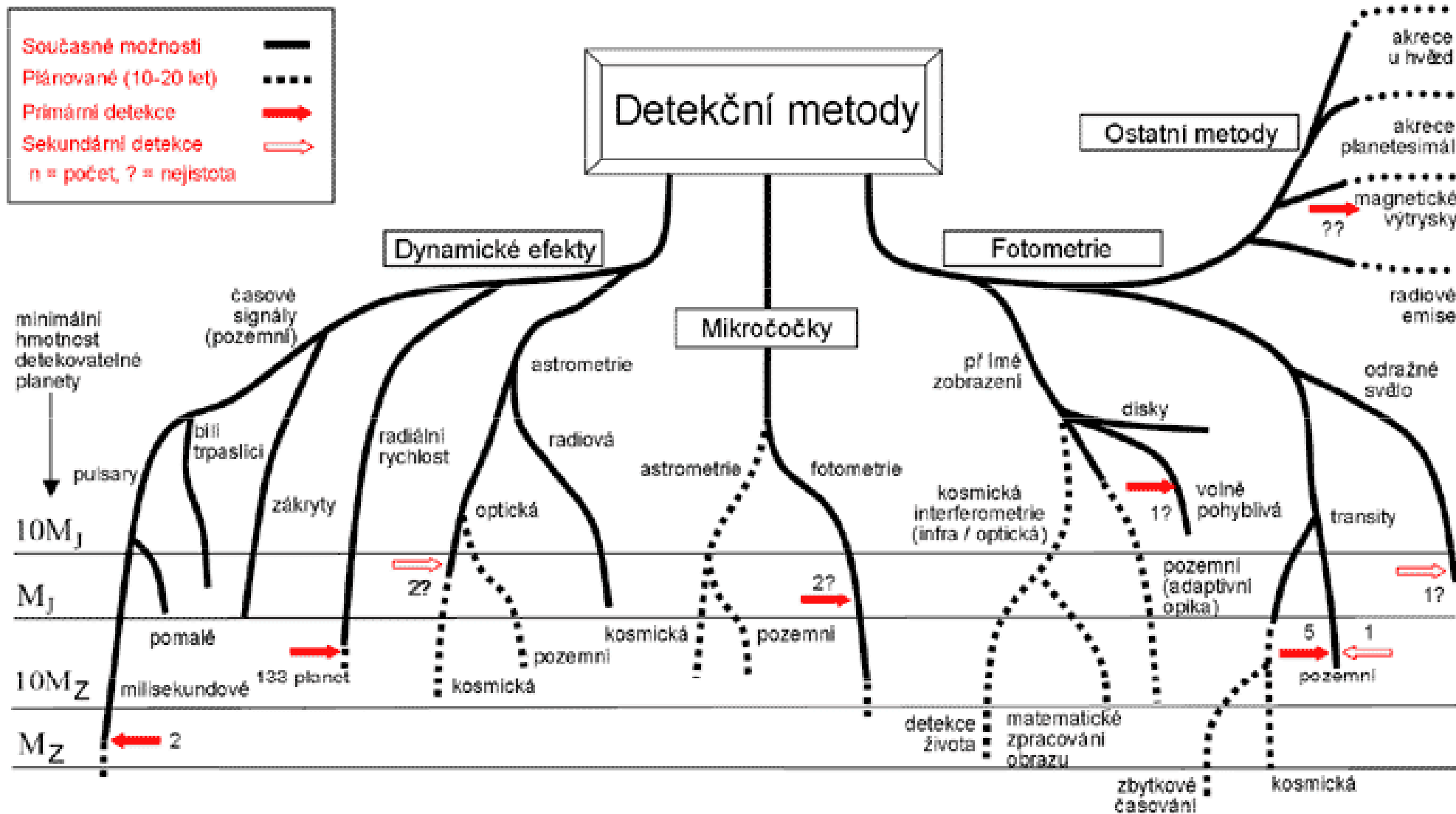
První objevené extrasolární systémy



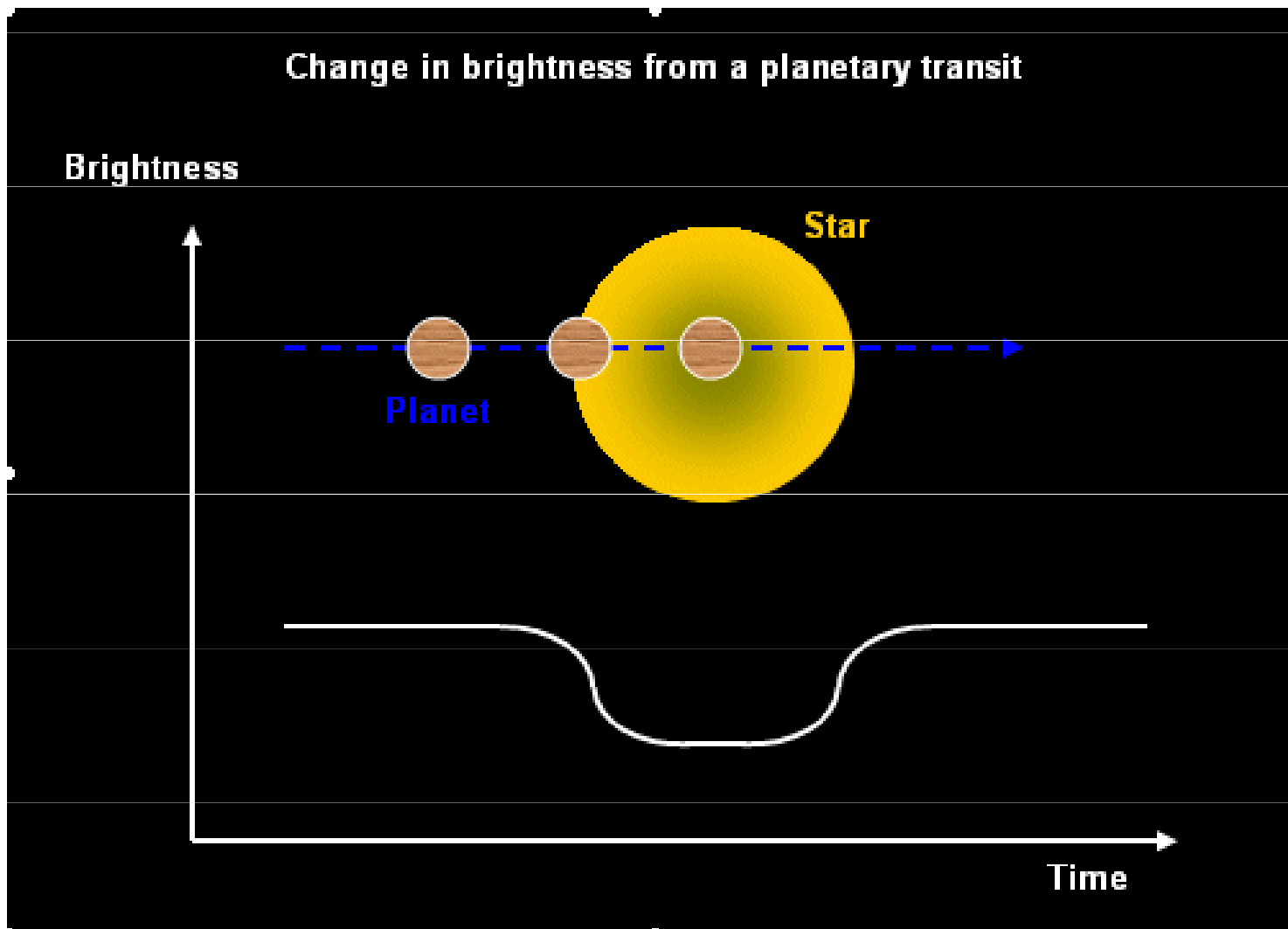
Extrasolární systém 55 Can



Metody detekce exoplanet



Fotometrické studium exoplanet



Světelné křivky přechodů exoplanety HD 209458b

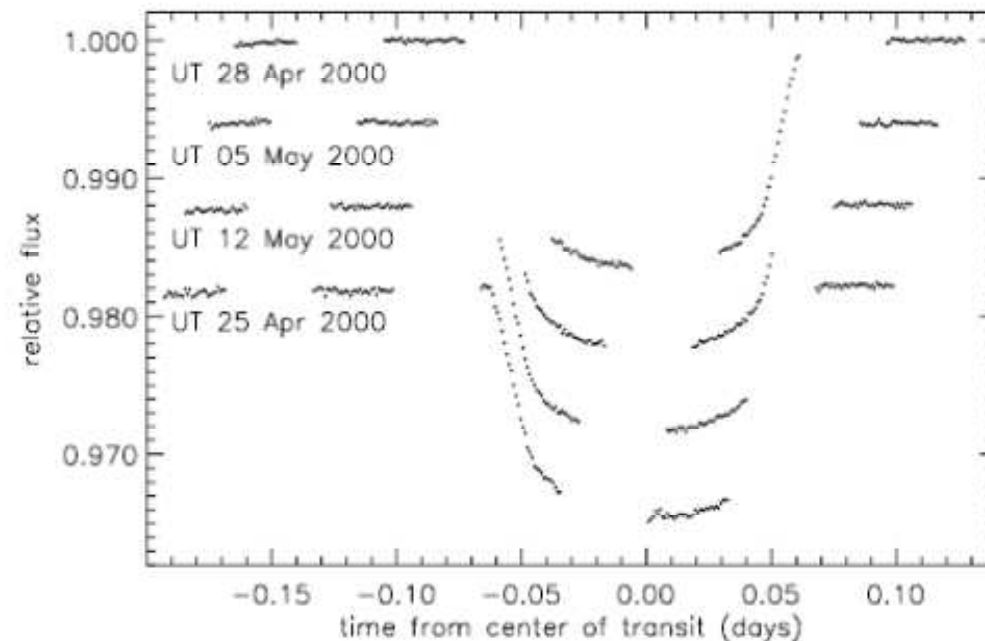


FIG. 2.—Time series of the corrected intensity shown separately for each of the four transits observed by *HST*, with successive transits offset by -0.006 for clarity. Note that, because the transit duration is almost two *HST* orbits, complete temporal coverage was not obtained for any one transit.

note that the depth of the eclipse is only 1.7%!). The orbital period was determined to be 3.5247 days, the lower limit on the mass of the planet $M_p \sin i = 0.69 \pm 0.05 M_J$ (with the inclination angle $i = 86^\circ 6 \pm 9^\circ 14$), and the radius of the planet $R_p = 1.347 \pm 0.060 R_J$. Most

Studium spektra HD 209458 - G0 V, $r = 47$ pc 1,1 M_S , 1,1 R_S

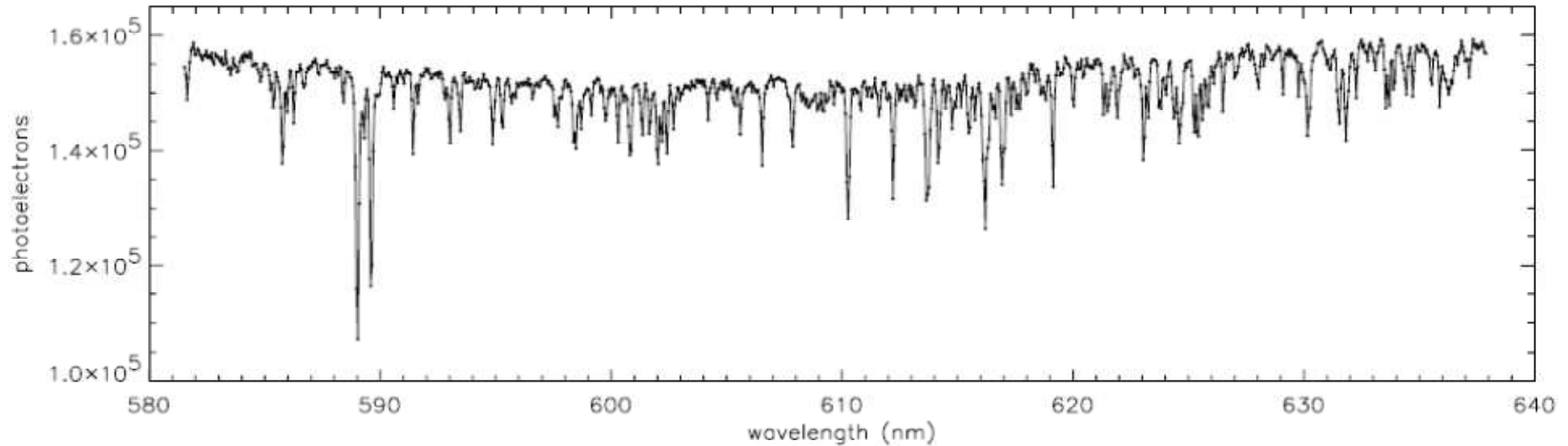


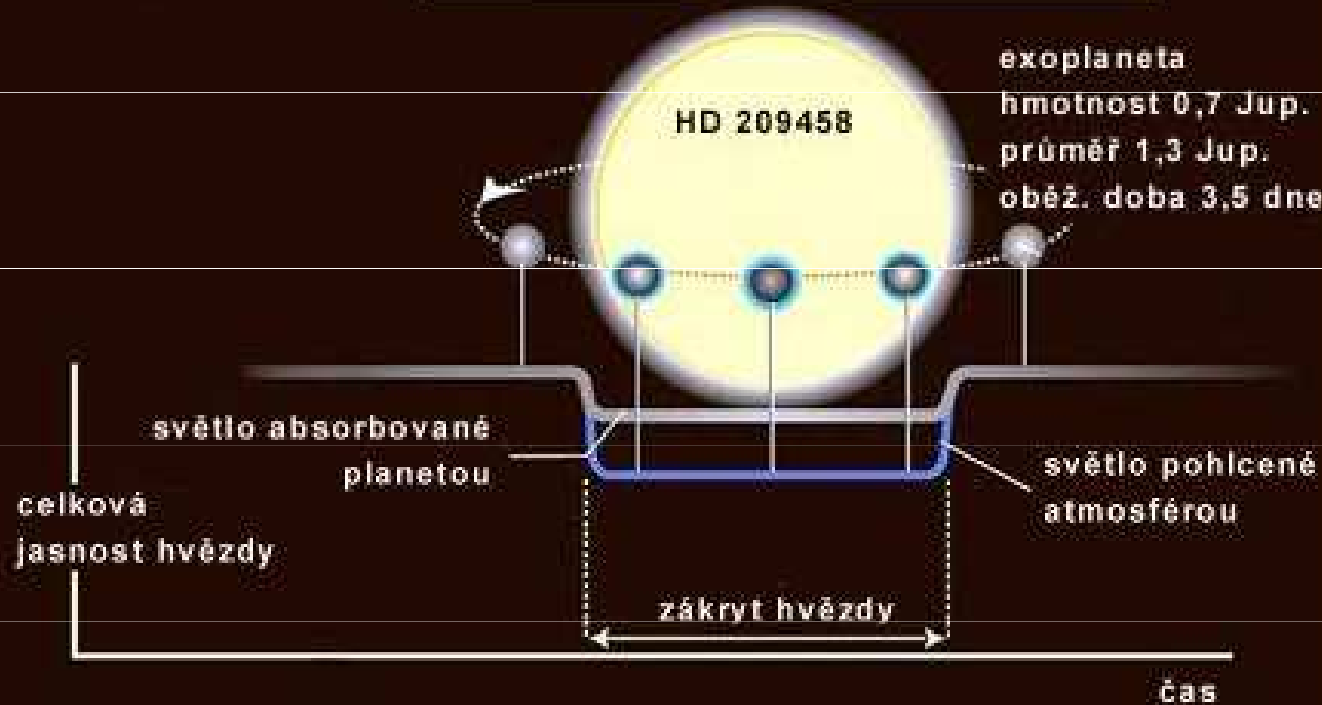
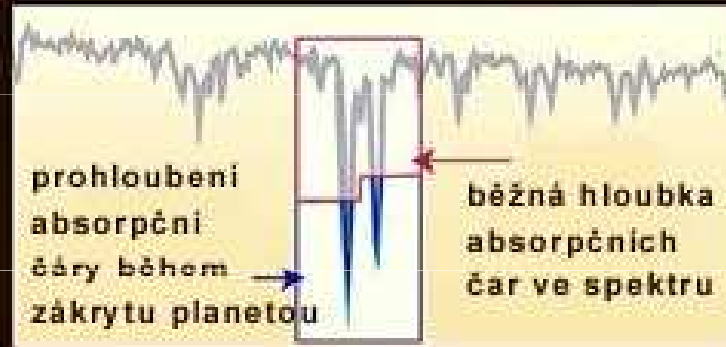
FIG. 1.—Typical spectrum of HD 209458 obtained with the STIS instrument, showing the number of detected photons in a single 60 s integration vs. wavelength. We obtained 684 such spectra in all.

teoretické modely Seager S., Sasselov D. D.:
Astrophys. J. **537**, 916, **2000** → předpověď prohloubení čar
při zákrytu

pozorování Charbonneau D. T., aj.: Astrophys. J. **568**, 377,
2002 → observační potvrzení

Důkaz atmosféry exoplanety HD 209458b

princip metody odhalující atmosféry u exoplanet



$a = 6,7$
mil.km

Kresba NASA.

Studium atmosféry exoplanety HD 209458b

An extended upper atmosphere around the extrasolar planet HD209458b

A. Vidal-Madjar*, A. Lecavelier des Etangs*, J.-M. Désert*,
G. E. Ballester†, R. Ferlet*, G. Hébrard* & M. Mayor‡

* Institut d'Astrophysique de Paris, CNRS/UPMC, 98bis boulevard Arago,
F-75014 Paris, France

† Lunar and Planetary Laboratory, University of Arizona, 1040 E. 4th St., Rm 901,
Tucson, Arizona 85721-0077, USA

‡ Observatoire de Genève, CH-1290 Sauverny, Switzerland

The planet in the system HD209458 is the first one for which repeated transits across the stellar disk have been observed^{1,2}. Together with radial velocity measurements³, this has led to a determination of the planet's radius and mass, confirming it to be a gas giant. But despite numerous searches for an atmospheric signature⁴⁻⁶, only the dense lower atmosphere of HD209458b has been observed, through the detection of neutral sodium absorption⁷. Here we report the detection of atomic hydrogen absorption in the stellar Lyman α line during three transits of HD209458b. An absorption of $15 \pm 4\%$ (1σ) is observed. Comparison with models shows that this absorption should take place beyond the Roche limit and therefore can be understood in terms of escaping hydrogen atoms.

Nature **422**, 143, 2003

Spektrum exoplanety HD 209 458b

Balmerův skok - „horký“ vodík

Atmosféra exoplanety je ohřívána ($a = 6,7$ mil. km)

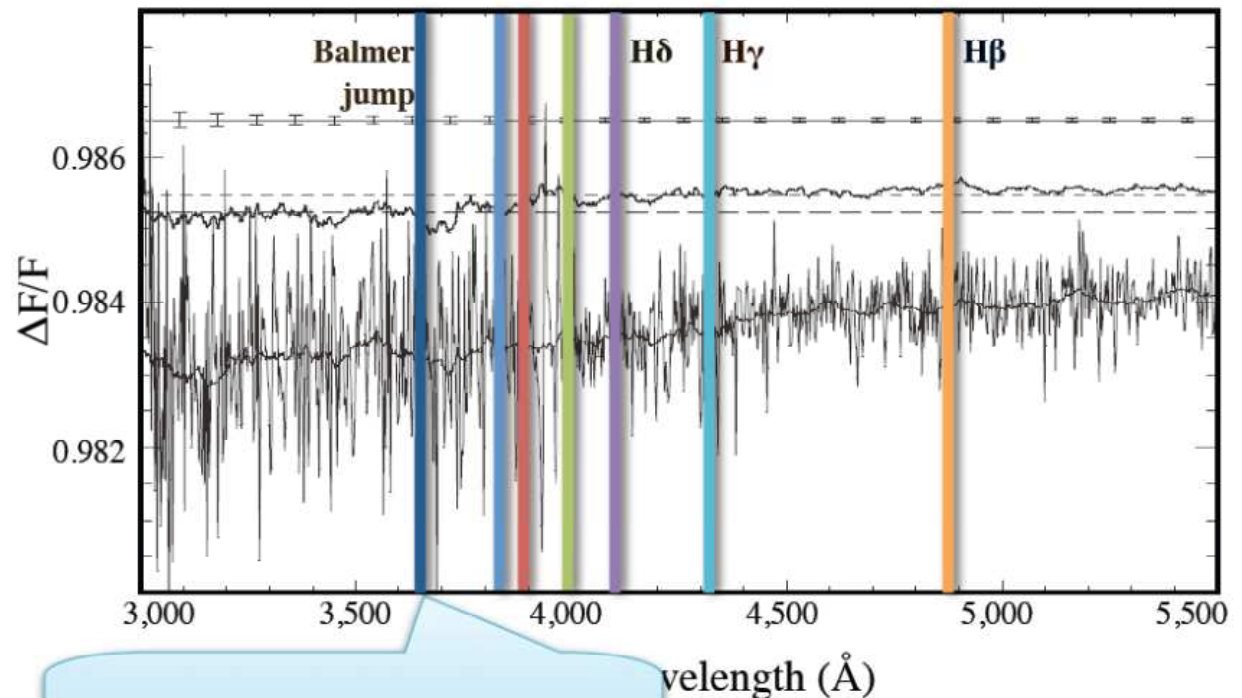
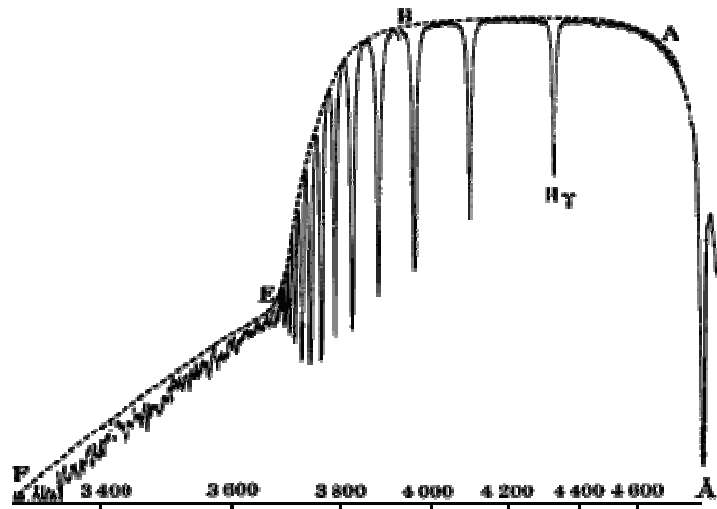
hvězdou, rozepíná se, z horní vrstvy uniká vodík

odečtení spekter hvězdy a při tranzitu = **spektrum exoplanety**

→ Balmerův skok

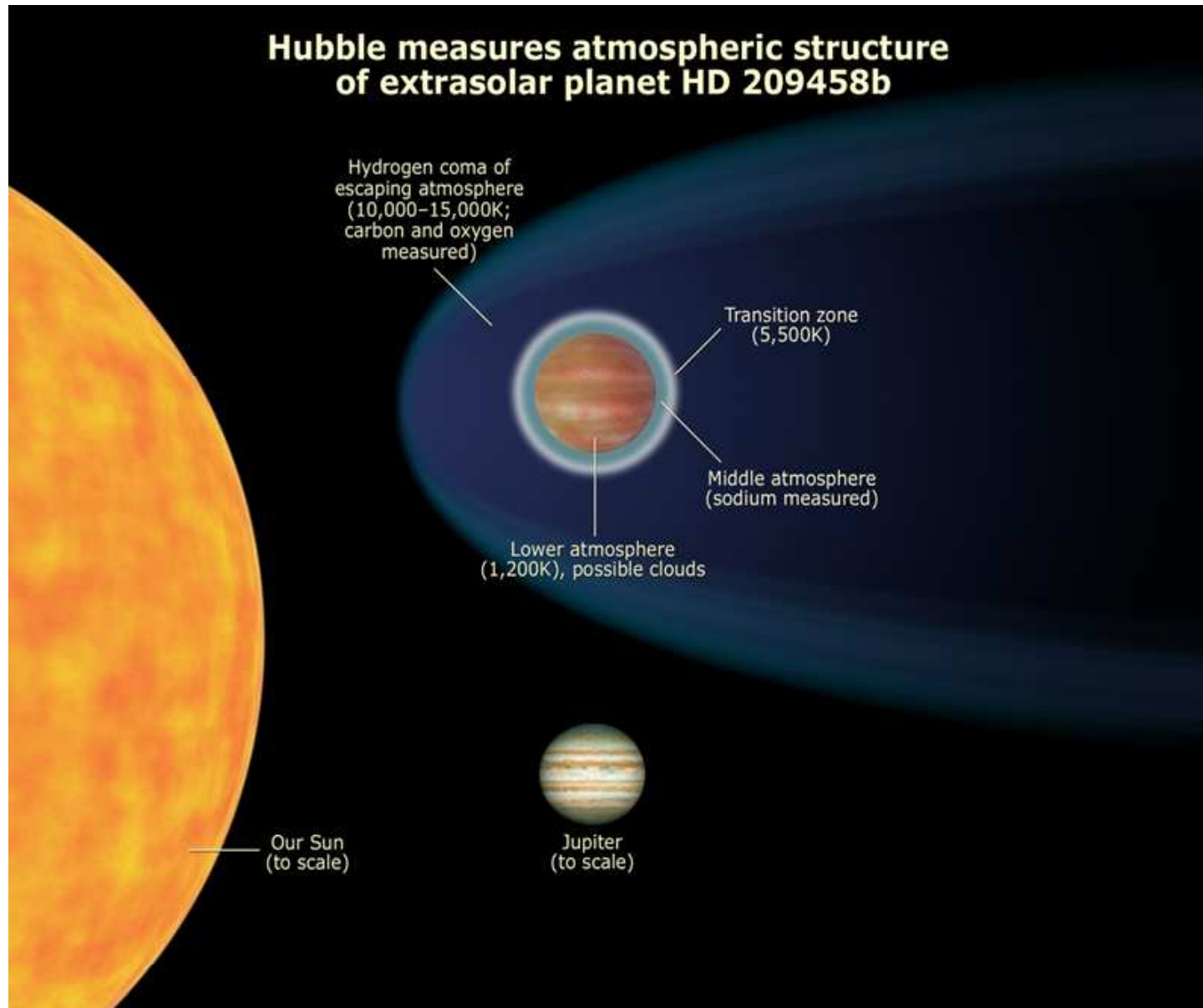
Hot hydrogen in HD 209458b

[Ballester et al. 2007]

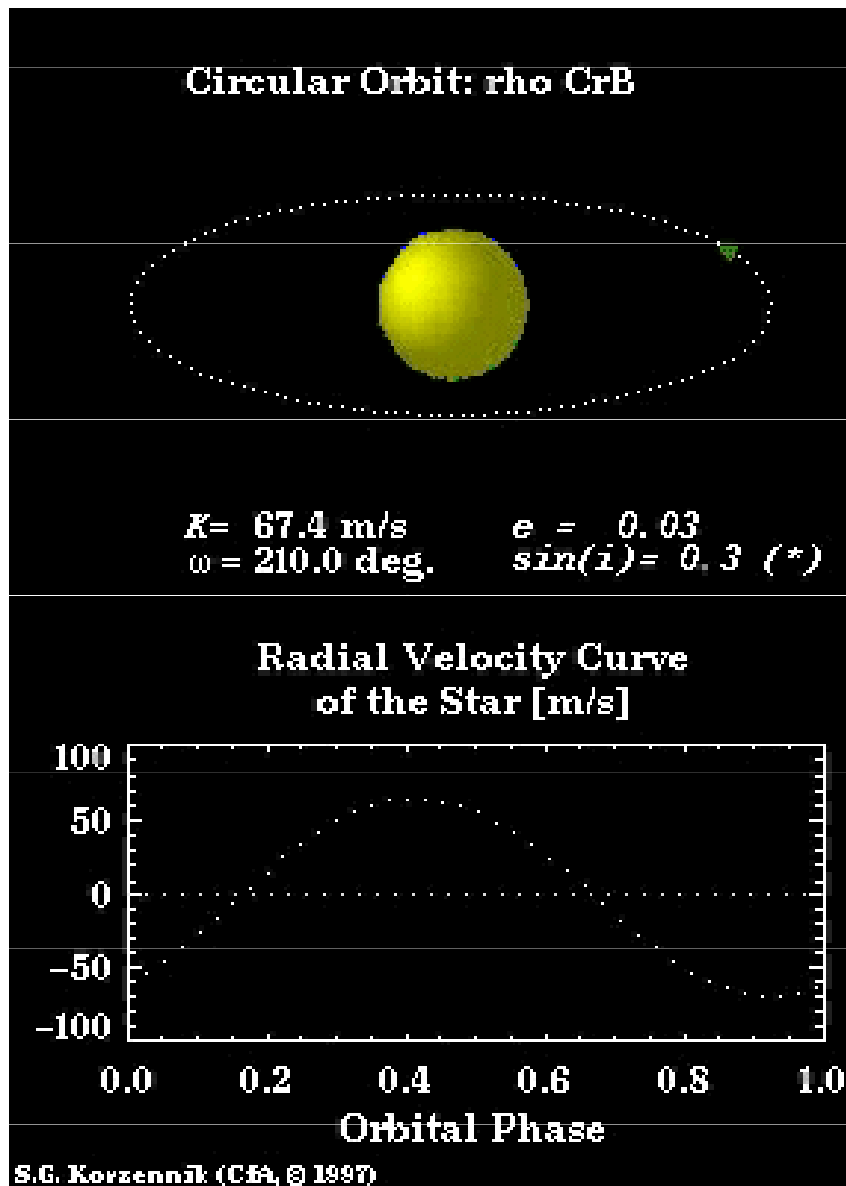


$\Delta F/F \sim 0.03\%$ at ~ 3700 Å → Balmer Jump

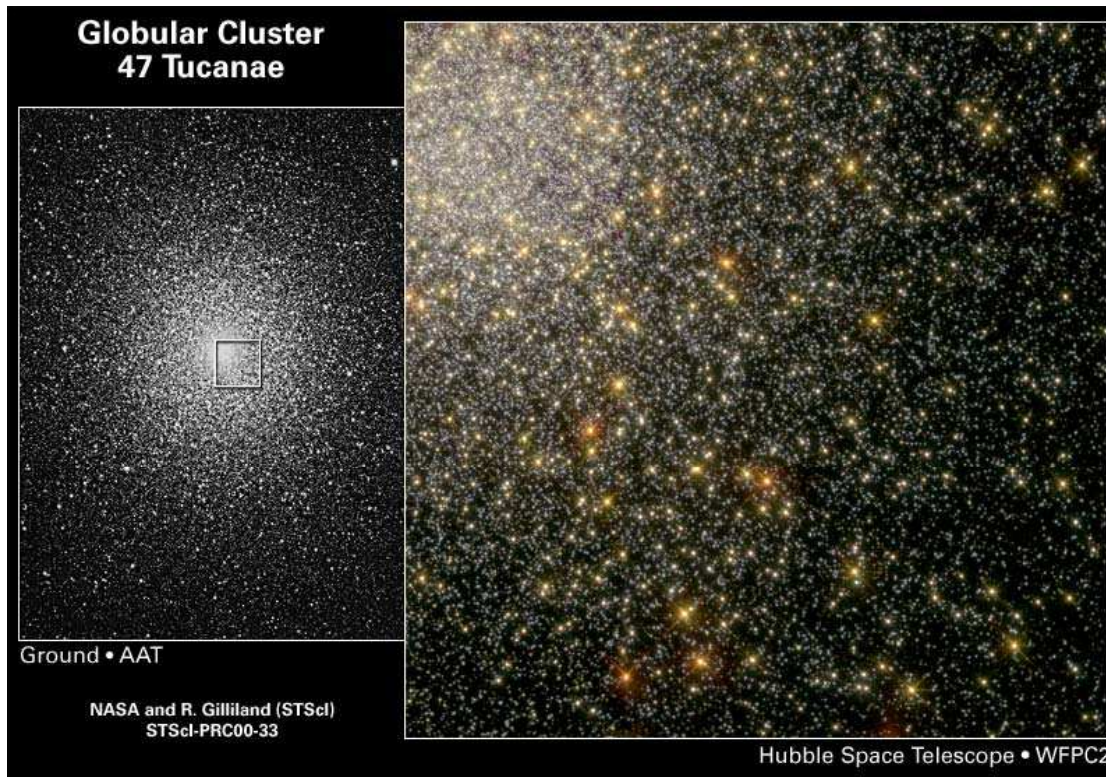
Struktura atmosféry exoplanety HD 209458b



Spektroskopické studium exoplanet



Extrasolární soustavy



NGC 104, 47 Tuc,
 $r = 4,7$ kpc

stáří 11 miliard, Fe/H ↓,

středová hustota

$1,5 \cdot 10^5 \text{ pc}^{-3}$

platí $\tau_{\text{tran}} = 1.412 M_*^{-1/3} R_* P_{\text{orb}}^{1/3}$

$M_*, R_*, P_{\text{orb}} \dots \text{dny}, \tau \dots \text{hod},$

HST WFPC2, 8,3 dne
předpoklad: **17 planet**

$M_* = 0,81, R_* = 0,92, P_{\text{orb}} = 3,8 \text{ dne},$
 $\tau = 2,2 \text{ hod}$

Extrasolární soustavy

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 545:L47–L51, 2000 December 10
© 2000. The American Astronomical Society. All rights reserved. Printed in U.S.A.

A LACK OF PLANETS IN 47 TUCANAE FROM A *HUBBLE SPACE TELESCOPE* SEARCH¹

RONALD L. GILLILAND,² T. M. BROWN,³ P. GUHATHAKURTA,⁴ A. SARAJEDINI,⁵ E. F. MILONE,⁶ M. D. ALBROW,²
N. R. BALIBER,⁷ H. BRUNTT,⁸ A. BURROWS,⁹ D. CHARBONNEAU,^{3,10} P. CHOI,⁴ W. D. COCHRAN,⁷
P. D. EDMONDS,¹⁰ S. FRANSEN,⁸ J. H. HOWELL,⁴ D. N. C. LIN,⁴ G. W. MARCY,¹¹ M. MAYOR,¹²
D. NAEF,¹² S. SIGURDSSON,¹³ C. R. STAGG,⁶ D. A. VANDENBERG,¹⁴
S. S. VOGT,⁴ AND M. D. WILLIAMS⁶

Received 2000 August 25; accepted 2000 October 10; published 2000 November 28

ABSTRACT

We report results from a large *Hubble Space Telescope* project to observe a significant (~34,000) ensemble of main-sequence stars in the globular cluster 47 Tucanae with a goal of defining the frequency of inner orbit, gas giant planets. Simulations based on the characteristics of the 8.3 days of time series data in the F555W and F814W Wide Field Planetary Camera 2 (WFPC2) filters show that ~17 planets should be detected by photometric transit signals if the frequency of hot Jupiters found in the solar neighborhood is assumed to hold for 47 Tuc. The experiment provided high-quality data sufficient to detect planets. A full analysis of these WFPC2 data reveals ~75 variables, but no light curves resulted for which a convincing interpretation as a planet could be made. The planet frequency in 47 Tuc is at least an order of magnitude below that for the solar neighborhood. The cause of the absence of close-in planets in 47 Tuc is not yet known; presumably the low metallicity and/or crowding of 47 Tuc interfered with planet formation, with orbital evolution to close-in positions, or with planet survival.

Subject headings: binaries: eclipsing — globular clusters: individual (NGC 104, 47 Tucanae) — planetary systems — techniques: photometric

Nenalezení extrasolárních planet v NGC 104

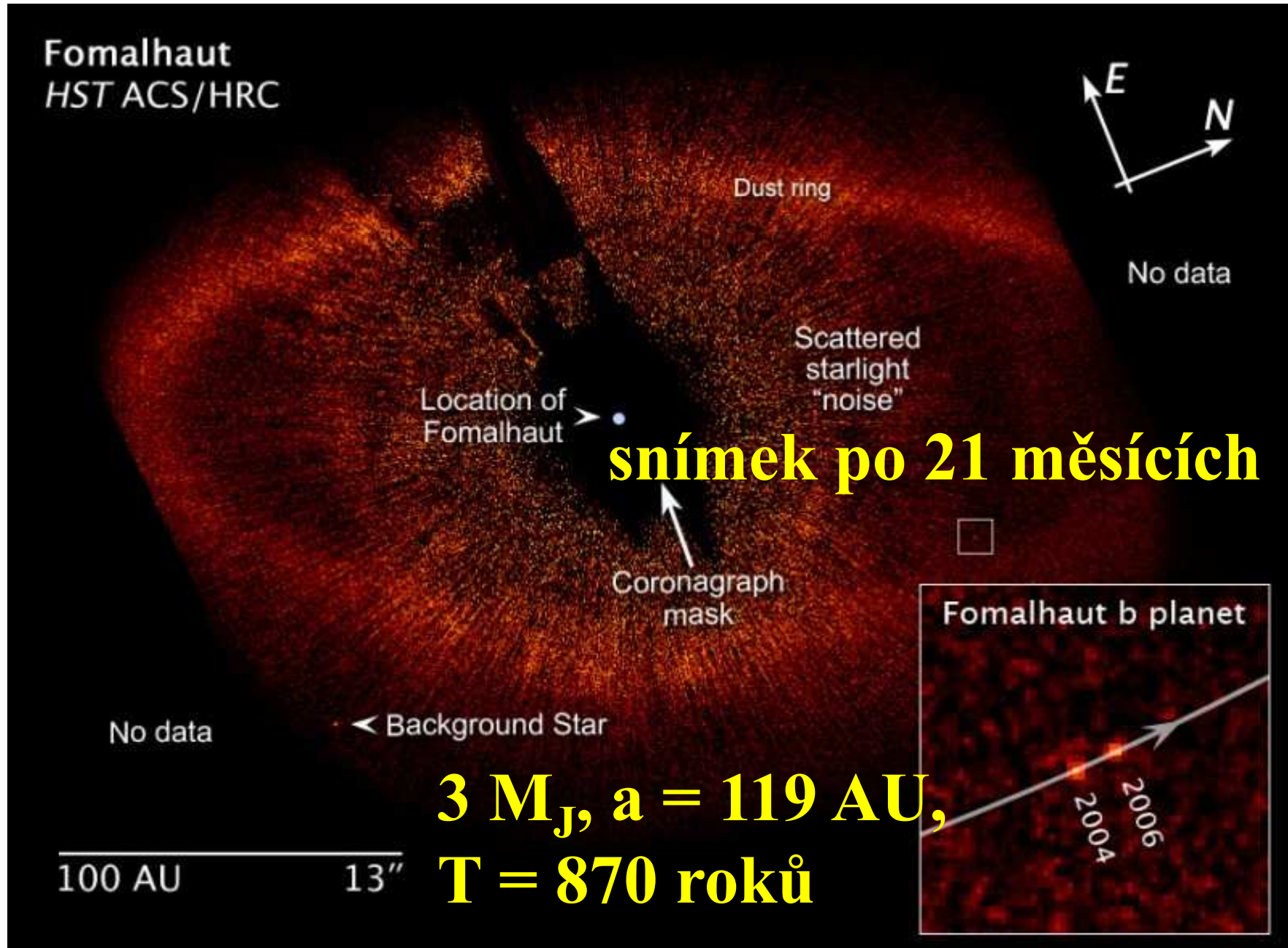
fotometricky pozorováno 34 000 hvězd, nalezeno 75 proměnných hvězd, **negativní výsledek u planet,**

Vysvětlení:

- **planety se vůbec neformovaly nebo velmi zřídka**
- **planety byly „roztrhány“ mateřskými hvězdami**

Příčina: nízký obsahem kovů respektive fotovypařování protoplanetárních disků ?!

Exoplaneta u hvězdy Fomalhaut – *rybí tlama*



Exoplaneta Fomalhaut b

Planeta **Fomalhaut b** obíhá kolem hvězdy **Fomalhaut a**, $r = 7,66$ pc. Hvězda: $2,1 M_S$, poloměru $1,8 R_S$, povrchová teplota $8\,700$ K. Planeta obíhá po dráze s $a = 115$ au, dráhová rovina shodná s rovinou oblohy. Určete oběžnou dobu planety T v rocích. HST snímkování planety v letech 2004 a 2006. Jakou vzdálenost urazila planeta mezi oběma snímky?

Řešení: úhlová vzdálenost mezi hvězdou **Fomalhaut a** a planetou **Fomalhaut b** je

$$\varphi = \frac{115.1,496.10^{11}}{7,66.3,086.10^{16}} = 7,29.10^{-5} \text{ rad} \approx 15''$$

III. Keplerův zákon v přesném tvaru $a^3 = \frac{G}{4\pi^2} MT^2$ Porovnáním soustavy

Fomalhaut a – b se soustavou Slunce – Země obdržíme

$$\left(\frac{a_{Fb}}{a_Z}\right)^3 = \frac{M_{Fa}}{M_S} \left(\frac{T_{Fb}}{T_Z}\right)^2$$

Velikost velké poloosy v au, oběžná doby v rocích obdržíme

$$a_{Fb}^3 = \frac{M_{Fa}}{M_S} T_{Fb}^2$$

Po dosazení $T_{Fb} = 850$ roků. Při zjednodušení - kruhová oběžná dráha planety je $2\pi a_{Fb}$.

Za dva roky činí uražená dráha planetou

$$\frac{2\pi a_F}{850} 2 = 1,7 \text{ AU}$$