Záření dipólu

Vynucené kmity:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -m\omega_0^2 x \,-\, m\gamma\dot{x} \,+\, qE_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\
x &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\
A &= \frac{\frac{q}{m}\,E_0}{\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\omega\gamma} \\
p_0 &= \frac{\frac{q^2}{m}\,E_0}{\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\omega\gamma}
\end{aligned}
$$

Celkový výkon záření dipólu:

$$
P \,=\, \frac{\omega^4}{c^3}\,\frac{p_0^2}{12\pi\varepsilon_0} \,=\, \frac{\omega^4}{c^3 12\pi\varepsilon_0}\,\frac{\left(\frac{q^2}{m}\,E_0\right)^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\gamma^2}
$$

Účinný průřez:

$$
\sigma \,=\, \frac{P}{I} \,=\, \frac{\omega^4}{c^3 12\pi\varepsilon_0}\,\frac{\left(\frac{q^2}{m}\,E_0\right)^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\gamma^2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{E_0^2}{2}} \,=\, \frac{\omega^4\mu_0^2}{6\pi}\,\frac{\frac{q^4}{m^2}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\gamma^2}
$$

Thomson ($\gamma \to 0$, $\omega_0 = 0$):

$$
\sigma_T \,=\, \frac{\mu_0^2 q^4}{6\pi m^2}
$$

Rayleigh ($\gamma \to 0$, $\omega \ll \omega_0$):

$$
\sigma_R \,=\, \frac{\mu_0^2 q^4}{6\pi m^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \,=\, \sigma_T\,\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4
$$

Izotropní molekuly:

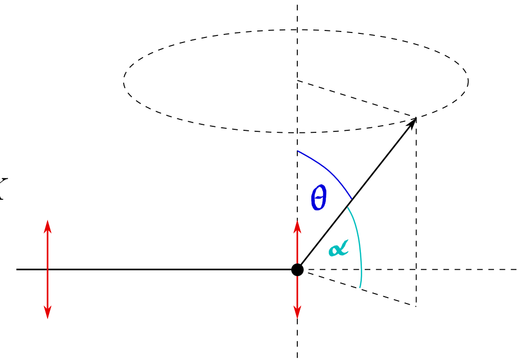
$$
\begin{aligned}
\vec{p} &= \alpha\vec{E} \\
P &= \frac{\omega^4\alpha^2E_0^2}{12\pi c^3\varepsilon_0} \\
\sigma_R &= \frac{\mu_0^2\omega^4\alpha^2}{6\pi} = \frac{8\pi^3\alpha^2}{3\varepsilon_0^2\lambda^4} = \frac{24\pi^3}{\lambda^4N^2}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \approx \frac{32\pi^2}{3\lambda^4}\left(\frac{n-1}{N}\right)^2
\end{aligned}
$$

Neizotropní molekuly: Polarizace molekuly nemusí být rovnoběžná s $\vec{E}_0$, rozptyl proto nemusí být zcela polarizován a může jít i do směru $\vec{E}_0$. Je-li orientace molekul náhodná, musí se výsledný rozptyl integrovat přes všechny orientace molekul.

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = K\,\sin^2\Theta$$

$$\sigma = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} K\,\sin^2\Theta\,\sin\Theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\Theta \;=\; 2\pi K\int_0^{\pi}\sin^3\Theta\,\mathrm{d}\Theta \;=\; \frac{8\pi}{3}\,K$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{3\sigma}{8\pi}\,\sin^2\Theta}$$



Závislost na rozptylovém úhlu:

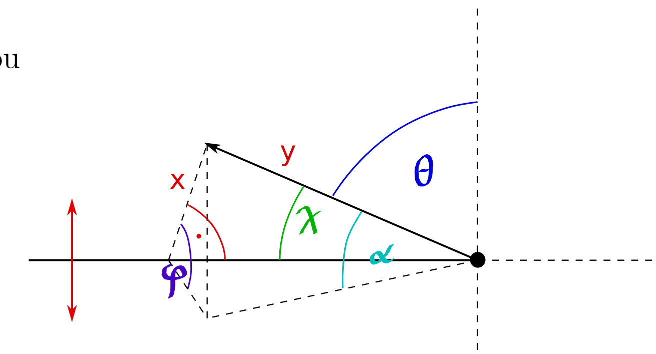
$X = \pi - \chi$: rozptylový úhel

φ: úhel mezi rovinou rozptylu a rovinou kolmou na polarizaci dopadajícího záření.

$$\sin\chi = \frac{x}{y}$$

$$x\sin\varphi = y\sin\alpha$$

$$\sin\chi = \frac{\cos\Theta}{\sin\varphi}$$

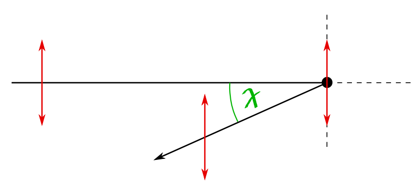


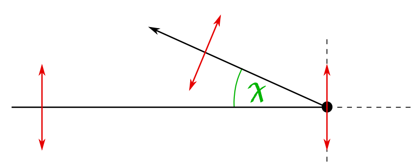
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{3\sigma}{8\pi}\left(1-\sin^2\varphi\,\sin^2\chi\right) = \frac{3\sigma}{8\pi}\left(1-\sin^2\varphi\,\sin^2 X\right)}$$

Rozptyl v kolmé rovině a v rovině rovnoběžné vzhledem k původní polarizaci:

$$\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{3\sigma}{8\pi}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{3\sigma}{8\pi}\left(1-\sin^2\chi\right) = \frac{3\sigma}{8\pi}\,\cos^2\chi$$





Nepolarizované světlo:

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right\rangle = \frac{3\sigma}{8\pi}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\varphi\sin^2\chi\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{3\sigma}{8\pi}\left(1-\frac{\sin^2\chi}{2}\right) = \frac{3\sigma}{16\pi}\left(1+\cos^2\chi\right)$$