

Metoda nejmenších čtverců

Lenka Příbylová

18. března 2011

Obsah

Najděte přímku aproximující body $[0, 5]$, $[1, 3]$, $[3, 3]$, $[5, 2]$, $[6, 1]$.	3
Nalezněte kalibrační křivku spektrometru.	15
Určete materiálové konstanty skla.	27

Najděte přímku aproximující body $[0, 5]$, $[1, 3]$, $[3, 3]$, $[5, 2]$, $[6, 1]$.

Najděte přímku aproximující body $[0, 5]$, $[1, 3]$, $[3, 3]$, $[5, 2]$, $[6, 1]$.

$$n = 5$$

Celkem máme pět bodů.

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$$n = 5$$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5		
2	1	3		
3	3	3		
4	5	2		
5	6	1		
Σ				

Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů v soustavě provedeme tabulce.

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$$n = 5$$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	
2	1	3	1	
3	3	3	9	
4	5	2	25	
5	6	1	36	
Σ				

Nalezneme jednotlivé druhé mocniny x_i .

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$$n = 5$$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
Σ				

Vynásobíme x_i a y_i

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
Σ	15			

Najdeme součet $\sum_{i=1}^5 x_i$.

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
Σ	15	14		

Najdeme součet $\sum_{i=1}^5 y_i$.

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
Σ	15	14	71	

Najdeme součet $\sum_{i=1}^5 x_i^2$.

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
Σ	15	14	71	28

Najdeme součet $\sum_{i=1}^5 x_i y_i$.

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3

Soustava lineárních rovnic:

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$a \sum x_i + bn = \sum y_i$$

$$71a + 15b = 28,$$

$$15a + 5b = 14.$$

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
Σ	15	14	71	28

$$71a + 15b = 28,$$

$$15a + 5b = 14.$$

Řešením této soustavy je $a = -\frac{7}{13} \doteq -0.538$ a $b = \frac{287}{65} \doteq 4.415$.

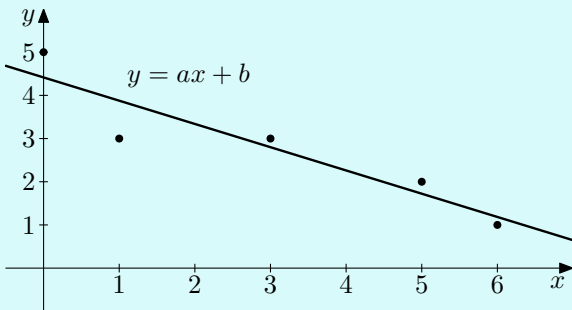
Nejllepší lineární aproximace souboru bodů je tedy přímka

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

Graf souboru bodů a výslednou přímku

$$y \doteq -0.538x + 4.415$$

zakreslíme do obrázku a zkontrolujeme optimalitu přímky.



Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$,
kde a je mřížková konstanta.

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i			
1	13°22'	404,8			
2	13°31'	409,2			
3	14°13'	430,0			
4	16°19'	491,9			
5	16°28'	496,3			
6	18°05'	543,5			
7	19°11'	575,3			
8	19°19'	579,1			
9	20°20'	608,4			
10	20°30'	613,1			
11	20°50'	622,7			

Celkem máme 11 měření.

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i			
1	13°22'	404,8			
2	13°31'	409,2			
3	14°13'	430,0			
4	16°19'	491,9			
5	16°28'	496,3			
6	18°05'	543,5			
7	19°11'	575,3			
8	19°19'	579,1			
9	20°20'	608,4			
10	20°30'	613,1			
11	20°50'	622,7			

Vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$ je lineárním vztahem mezi $y_i = \sin \varphi_i$ a $x_i = \lambda_i$ s neznámou konstantou $A = \frac{1}{a}$.

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin \varphi_i$		
1	13°22'	404,8	0,2312		
2	13°31'	409,2	0,2337		
3	14°13'	430,0	0,2456		
4	16°19'	491,9	0,2809		
5	16°28'	496,3	0,2835		
6	18°05'	543,5	0,3104		
7	19°11'	575,3	0,3286		
8	19°19'	579,1	0,3308		
9	20°20'	608,4	0,3475		
10	20°30'	613,1	0,3502		
11	20°50'	622,7	0,3557		

Nalezneme $\sin \varphi_i$. Minuty převádíme: $13^\circ 22' = 13 + \frac{22}{60}^\circ = 13,37^\circ$.

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin \varphi_i$		
1	13°22'	404,8	0,2312		
2	13°31'	409,2	0,2337		
3	14°13'	430,0	0,2456		

Podle vztahu $y_i = \sin \varphi = A\lambda$ tedy minimalizujeme

$$\sum_{i=1}^{11} (A\lambda_i - \sin \varphi_i)^2$$

vzhledem k $A = a^{-1}$, tj.

$$\sum_{i=1}^{11} 2(A\lambda_i - \sin \varphi_i)\lambda_i = 0.$$

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin \varphi_i$		
1	13°22'	404,8	0,2312		
2	13°31'	409,2	0,2337		
3	14°13'	430,0	0,2456		
4	16°19'	491,9	0,2809		
5	16°28'	496,3	0,2835		
6	18°05'	543,5	0,3104		
7	19°11'	575,3	0,3286		
8	19°19'	579,1	0,3308		
9	20°20'	608,4	0,3475		
10	20°30'	613,1	0,3502		
11	20°50'	622,7	0,3557		

Nutnou podmínkou minima je proto splnění rovnosti $A \sum \lambda_i^2 = \sum \lambda_i \sin \varphi_i$. Do tabulky proto doplníme uvedené sumy.

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin \varphi_i$	λ_i^2	
1	13°22'	404,8	0,2312	163863,04	
2	13°31'	409,2	0,2337	167444,64	
3	14°13'	430,0	0,2456	184900,00	
4	16°19'	491,9	0,2809	241965,61	
5	16°28'	496,3	0,2835	246313,69	
6	18°05'	543,5	0,3104	295392,25	
7	19°11'	575,3	0,3286	330970,09	
8	19°19'	579,1	0,3308	335356,81	
9	20°20'	608,4	0,3475	370150,56	
10	20°30'	613,1	0,3502	375891,61	
11	20°50'	622,7	0,3557	387755,29	
Σ					

Nalezneme λ_i^2

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin \varphi_i$	λ_i^2	
1	13°22'	404,8	0,2312	163863,04	
2	13°31'	409,2	0,2337	167444,64	
3	14°13'	430,0	0,2456	184900,00	
4	16°19'	491,9	0,2809	241965,61	
5	16°28'	496,3	0,2835	246313,69	
6	18°05'	543,5	0,3104	295392,25	
7	19°11'	575,3	0,3286	330970,09	
8	19°19'	579,1	0,3308	335356,81	
9	20°20'	608,4	0,3475	370150,56	
10	20°30'	613,1	0,3502	375891,61	
11	20°50'	622,7	0,3557	387555,09	

a sečteme.

Σ				310000,57	
----------	--	--	--	-----------	--

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin \varphi_i$	λ_i^2	$\lambda_i \sin \varphi_i$
1	13°22'	404,8	0,2312	163863,04	93,59
2	13°31'	409,2	0,2337	167444,64	95,63
3	14°13'	430,0	0,2456	184900,00	105,61
4	16°19'	491,9	0,2809	241965,61	138,17
5	16°28'	496,3	0,2835	246313,69	140,70
6	18°05'	543,5	0,3104	295392,25	168,70
7	19°11'	575,3	0,3286	330970,09	189,04
8	19°19'	579,1	0,3308	335356,81	191,57
9	20°20'	608,4	0,3475	370150,56	211,42
10	20°30'	613,1	0,3502	375891,61	214,71
11	20°50'	622,7	0,3557	387755,29	221,49
Σ				3100003,59	

Vynásobíme $\sin \varphi_i$ a λ_i

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin \varphi_i$	λ_i^2	$\lambda_i \sin \varphi_i$
1	13°22'	404,8	0,2312	163863,04	93,59
2	13°31'	409,2	0,2337	167444,64	95,63
3	14°13'	430,0	0,2456	184900,00	105,61
4	16°19'	491,9	0,2809	241965,61	138,17
5	16°28'	496,3	0,2835	246313,69	140,70
6	18°05'	543,5	0,3104	295392,25	168,70
7	19°11'	575,3	0,3286	330970,09	189,04
8	19°19'	579,1	0,3308	335356,81	191,57
9	20°20'	608,4	0,3475	370150,56	211,42
10	20°30'	613,1	0,3502	375891,61	214,71

a najdeme součet.

Σ				310000,57	1770,04
----------	--	--	--	-----------	---------

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

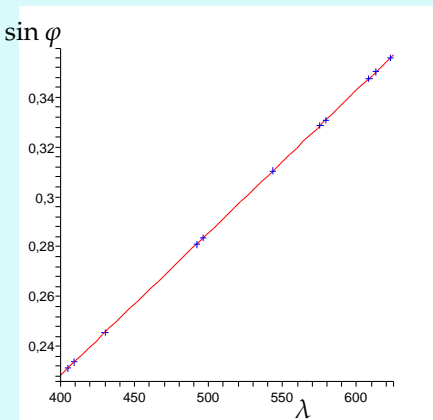
i	φ_i	λ_i	$\sin \varphi_i$	λ_i^2	$\lambda_i \sin \varphi_i$
1	13°22'	404,8	0,2312	163863,04	93,59
2	13°31'	409,2	0,2337	167444,64	95,63
3	14°13'	430,0	0,2456	184900,00	105,61
4	16°19'	491,9	0,2809	241965,61	138,17
5	16°28'	496,3	0,2835	246313,69	140,70
6	18°05'	543,5	0,3104	295392,25	168,70

$$A = \frac{\sum \lambda_i \sin \varphi_i}{\sum \lambda_i^2} = \frac{1770,64}{3100003,59} = 0,00057117.$$

10	20°30'	615,1	0,3502	378391,01	214,71
11	20°50'	622,7	0,3557	387755,29	221,49
Σ				3100003,59	1770,64

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$,
kde a je mřížková konstanta.

Zakreslíme kalibrační křivku spektrometru a opticky zkontrolujeme optimalitu přímky.



Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu. Pro vybrané spektrální čáry rtuťové výbojky byly určeny následující hodnoty indexu lomu skleněného hranolu, k proložení naměřených dat použijte Cauchyův vztah $n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}$.

i	λ_i [nm]	n_i
1	623,4	1,619
2	579,1	1,622
3	546,1	1,624
4	491,6	1,631
5	435,8	1,643
6	404,6	1,650

Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

Minimalizujeme vzdálenosti skutečně naměřených hodnot od hodnot na aproximující křivce, tj.

$$\sum_{i=1}^6 (a + b \frac{1}{\lambda_i^2} + c \frac{1}{\lambda_i^4} - n_i)^2 \longrightarrow \min$$

$$\left(\sum_{i=1}^6 (a + b \frac{1}{\lambda_i^2} + c \frac{1}{\lambda_i^4} - n_i)^2 \right)'_a = \sum_{i=1}^6 2(a + b \frac{1}{\lambda_i^2} + c \frac{1}{\lambda_i^4} - n_i) = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^6 (a + b \frac{1}{\lambda_i^2} + c \frac{1}{\lambda_i^4} - n_i)^2 \right)'_b = \sum_{i=1}^6 2(a + b \frac{1}{\lambda_i^2} + c \frac{1}{\lambda_i^4} - n_i) \frac{1}{\lambda_i^2} = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^6 (a + b \frac{1}{\lambda_i^2} + c \frac{1}{\lambda_i^4} - n_i)^2 \right)'_c = \sum_{i=1}^6 2(a + b \frac{1}{\lambda_i^2} + c \frac{1}{\lambda_i^4} - n_i) \frac{1}{\lambda_i^4} = 0$$

Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

Roznásobením a sloučením vhodných sčítanců dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned}6a + b \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^2} + c \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} &= \sum_{i=1}^6 n_i \\ a \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^2} + b \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} + c \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^6} &= \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^2} n_i \\ a \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} + b \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^6} + c \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^8} &= \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} n_i\end{aligned}$$

Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

Maticově zapíšeme soustavu

$$\begin{pmatrix} 6 & \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^2} & \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} \\ \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^2} & \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} & \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^6} \\ \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} & \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^6} & \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^6 n_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^2} n_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} n_i \end{pmatrix}$$

Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

Maticově zapíšeme soustavu

$$\begin{pmatrix} 6 & \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^2} & \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} \\ \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^2} & \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} & \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^6} \\ \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} & \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^6} & \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^6 n_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^2} n_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} n_i \end{pmatrix}$$

$$\text{kde } \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^2} \doteq 0.2442011288 \cdot 10^{-4}, \quad \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} \doteq 0.1089183487 \cdot 10^{-9},$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^6} \doteq 0.5260289304 \cdot 10^{-15}, \quad \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^8} \doteq 0.2703580405 \cdot 10^{-20},$$

Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

$$\sum_{i=1}^6 n_i = 9,789, \quad \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^2} n_i \doteq 0.3992726604 \cdot 10^{-4},$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} n_i \doteq 0.1784493319 \cdot 10^{-9}.$$

Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

$$\sum_{i=1}^6 n_i = 9,789, \quad \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^2} n_i \doteq 0.3992726604 \cdot 10^{-4},$$

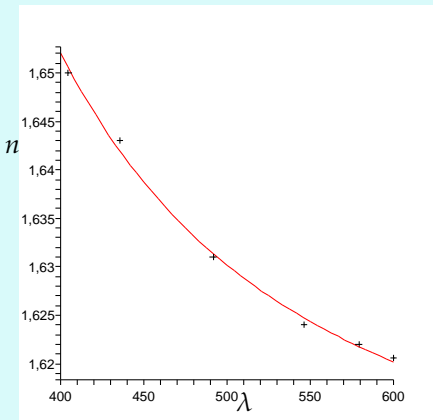
$$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i^4} n_i \doteq 0.1784493319 \cdot 10^{-9}.$$

Cramerovým pravidlem dostáváme řešení $a \doteq 1.602537615$,
 $b \doteq 5114.983088 \text{ nm}^2$ a $c \doteq 448646567.9 \text{ nm}^4$, tedy

$$n = 1.602537615 + 5114.983088 \frac{1}{\lambda^2} + 448646567.9 \frac{1}{\lambda^4}.$$

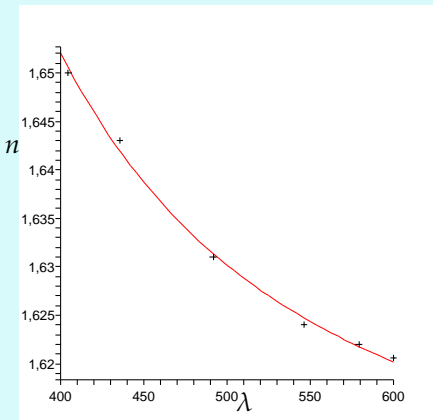
Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

Opticky zkontrolujeme optimalitu křivky.



Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

Opticky zkontrolujeme optimalitu křivky.



KONEC