12. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}AP$.

S maticí A je svázán lineární operátor

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi(x) = Ax.$$

Prvně najdeme jeho vlastní čísla a vlastní vektory: Počítáme determinant charakteristické matice

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4-\lambda & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{od 4. řádku odečteme } 2\times \text{ 2. řádek}}{=} \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 2\lambda-6 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Rozvoj podle 4. řádku

$$= (2\lambda-6)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \end{vmatrix} + (3-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2\lambda-6)\left\{3(\lambda-6) + 2(4-\lambda) + 6\right\}$$

$$+ (3-\lambda)\left\{(6-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) + 8 + 6(4-\lambda) - 4(6-\lambda)\right\}$$

$$= 2(\lambda-3)(\lambda-4) + (3-\lambda)\left\{(\lambda^2-8\lambda+12)(4-\lambda) + 2(4-\lambda)\right\}$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-4)\left\{2 + \lambda^2 - 8\lambda + 12 + 2\right\} = (\lambda-3)(\lambda-4)^3$$

12. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}AP$.

Vlastní čísla jsou 3 alg. násobnosti 1 a 4 alg. násobnosti 3.

Vlastní vektor u k vl. číslu 3 je

$$u = (1, 1, 1, 1)^T.$$

Vlastní vektory k vl. číslu 4 jsou násobky vektoru $v = (1, 0, 2, 0)^T$.

Nyní již víme, že Jordanův kanonický tvar má 2 buňky, neboť počet buněk = počet lin. nezávislých vl. vektorů.

Dále velikost buňky pro vl. čísla 3 je 1 (= alg. násobnost 3) a velikost buňky pro vl. čísla 4 je 3 (= alg. násobnost vl. čísla 4). Tedy

$$J = \left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

3

Abychom našli matici P takovou, že

$$J = P^{-1} A P,$$

musíme najít bázi α prostoru $\mathbb{R}^4$, v níž

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J.$$

Báze α se skládá z řetězců příslušných vlastním číslům 3 a 4. Řetězec pro vl. čísla 3 má velikost 1 a tvoří jej vlastní vektor $u = (1,1,1,1)^T$. Řetězec k vl. číslu 4 má velikost 3 a je tvořen vektory

$$v_1 = v = (1,0,2,0)^T, \quad v_2, \quad v_3$$

kde v_1 je vlastní vektor a

$$(A-4E)v_2 = v,$$

$$(A-4E)v_3 = v_2.$$

Spočítáme prvně v_2, řešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení je $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Řešíme $(A-4E)v_3 = v_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -1 & 1 & 1+a \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 2a \\ 4 & -2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{jako výše}}{\overset{\text{stejné úpravy}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 2a \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2a \end{array}\right)$$

Volme $a = 0$, $v_2 = (1,1,0,2)^T$, $v_3 = (1,0,1,0)^T$.

Řetězec pro vl. čísla 4 je (jeden z více možných)

$(1,0,2,0)^T$, $(1,1,0,2)^T$, $(1,0,1,0)^T$.

Báze α je $\alpha = (u, v_1, v_2, v_3)$ a

matice $P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad. 2. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$G = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici Q takovou, že $J = Q^{-1}GQ$.

Spočítat charakteristický polynom je v případě matic 4×4, kde nejsou žádné 0, velice pracné a zdlouhavé. Je to kombinace řádkových a sloupcových úprav s Laplaceovým rozvojem. Zde to jenom naznačíme:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13-\lambda & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11-\lambda & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{1.\ \text{sloupec} \\ -4.\ \text{sloupec}}}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -9 & 5 & 4 \\ 0 & -13-\lambda & 8 & 7 \\ 0 & -17 & 11-\lambda & 8 \\ \lambda-2 & -2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -13-\lambda & 8 & 7 \\ -17 & 11-\lambda & 8 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - (\lambda-2) \begin{vmatrix} -9 & 5 & 4 \\ -13-\lambda & 8 & 7 \\ -17 & 11-\lambda & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 13+\lambda & 8 & 7 \\ 17 & 11-\lambda & 8 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + (\lambda-2) \begin{vmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 13+\lambda & 8 & 7 \\ 17 & 11-\lambda & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\{(13+\lambda)(11-\lambda)(3-\lambda) + 2\cdot 64 + 7\cdot 17 - 14(11-\lambda)$$
$$- 8\cdot 17(3-\lambda) - 8(13+\lambda)\} +$$

6

Příklad. 2. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$G = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici Q takovou, že $J = Q^{-1}GQ$.

$$+(\lambda-2)\{9\cdot 64 + 35\cdot 17 + 4(13+\lambda)(11-\lambda) - 17\cdot 32 - 40(13+\lambda) - 63(11-\lambda)\} = \ldots\ldots$$

$$\ldots = (\lambda-2)\{\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4\} = (\lambda-2)^3(\lambda-1)$$

Vlastní vektor k $\lambda = 1$ (vl. číslo alg. nás. 1)

$$\begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -14 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 10 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektor je $u = (3, 6, 7, 1)^T$.

Vlastní vektory k $\lambda = 2$ (vl. čísla alg. nás. 3)

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -15 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(7)

Příklad. 2. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$G = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici Q takovou, že $J = Q^{-1}GQ$.

Vlastní vektory jsou

$$a(1,1,1,0)^T + b(-1,0,0,1)^T$$

$\lambda = 2$ je vl. číslo geometrické násobnosti 2.

Proto má Jordanův kanonický tvar 2 buňky pro vlastní číslo 2 a jednu buňku pro vlastní číslo 1. Jediná možnost je

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

K nalezení matice Q takové, že $J = Q^{-1}GQ$ potřebujeme najít bázi $\mathbb{R}^4$ takovou, že

1. vektor je vlastní vektor k vl. číslu 1

2. a 3. vektor tvoří řetězec délky 2 pro vlastní ~~vektoru~~ číslo 2

4. vektor je vlastní vektor k vl. číslu 2

$$\alpha = (u, v_1, v_2, v_3)$$

$$(G-E)u_1 = 0$$

$$(G-2E)v_1 = 0$$

$$(G-2E)v_2 = v_1$$

Příklad 2. $(G-2E)v_3 = 0$

v_1 hledáme ve tvaru

$$a(1,1,1,0)^T + b(-1,0,0,1)^T$$

tak, že soustava $(G-2E)x = v_1$ má řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -9 & 5 & 4 & a-b \\ 7 & -15 & 8 & 7 & a \\ 8 & -17 & 9 & 8 & a \\ 1 & -2 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & a-5b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & a-7b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & a-8b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & a-5b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3b \end{array}\right)$$ Aby soustava měla řešení, musí být $b=0$.

Volíme tedy $a=1$, $b=0$, $v_1 = (1,1,1,0)^T$.

v_2 zvolíme jako jakékoliv řešení soustavy $(G-2E)x = v_1$, např. $v_2 = (-2,-1,0,0)^T$.

Nyní za v_3 vezmeme vlastní vektor k vl. číslu $\lambda=2$ lineárně nezávislý s v_1. Tedy např. $v_3 = (-1,0,0,1)$. Báze α je

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 3\\6\\7\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right), \quad Q = (id)_{\varepsilon\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zkoušku, že jsme počítali správně, uděláme tak, že porovnáme

$$QJ = GQ.$$

Příklad. 3. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici R takovou, že $J = R^{-1}KR$.

Spočítáme charakteristický polynom:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Od 4. řádku odečteme 3. řádek}}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\{\lambda(\lambda-2)(\lambda-1) - (1-\lambda)\} = (\lambda-1)(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1)$$

$$= (\lambda-1)^4$$

Vlastní číslo $\lambda = 1$ má algebraickou násobnost 4. Najdeme příslušné vlastní vektory.

Příklad. 3. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici R takovou, že $J = R^{-1}KR$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Řešení je $(a, a, b, b)^T$

$x_1 = x_2 = a$

$x_3 = b$, $x_4 = x_1 - x_2 + x_3 = b$

$= a(1,1,0,0)^T + b(0,0,1,1)^T$

Geometrická násobnost vl. čísla $\lambda = 1$ je 2. Proto má Jord. kanonický tvar dvě buňky. Jsou dvě možnosti

$$J = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ nebo } J = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Musíme zjistit, zda rovnice

$$(K - E)x = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ b \end{pmatrix}$$ má řešení

pro všechna a, b.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

Příklad. 3. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici R takovou, že $J = R^{-1}KR$.

Je vidět, že soustava má řešení pro všechna a, b. Tedy každý vlastní vektor je začátkem řetězce délky 2, a proto

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vezměme vlastní vektor $u_1 = (1,1,0,0)^T$. Pak jedno z řešení soustavy $(K-E)x = u_1$ je $u_2 = (0,0,0,1)^T$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pro vlastní vektor $v_1 = (0,0,1,1)^T$ je jedno z řešení soustavy

$$(K-E)x = v_1 \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

je jedno z řešení

$v_2 = (0,1,1,0)^T$.

Příklad 3

Tedy v $\mathbb{R}^4$ vezmeme bázi

$$\alpha = (u_1, u_2, v_1, v_2)$$

v této bázi má lineární operátor

$\varphi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Kx$, matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proto

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} (id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$= R^{-1} K R$$

Tedy
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O správnosti výpočtu se můžeme přesvědčit zkouškou

$$RJ = AR.$$

jiná možnost řešení příkladu 3

Vzhledem k tomu, že matice K má jediné vlastní číslo alg. násobnosti 4, můžeme hledat příslušné řetězce tak, že volíme poslední vektor v řetězu náhodně.

$$z = (1,0,0,0)^T, \quad (K-E)z = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (K-E)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dostáváme tedy řetězec délky 2

$$(-1,-1,-1,-1)^T, \quad (1,0,0,0)^T$$

Zvolme jiný vektor, který neleží v lin. obalu předchozích dvou:

$$y = (0,1,0,0)^T, \quad (K-E)y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (K-E)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Máme další řetězec délky 2, ale vektory na začátku obou řetězců jsou lineárně závislé. Zkusme tedy ještě jednou

$$x = (0,0,1,0) \quad (K-E)x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (K-E)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 3

Dostáváme tedy 2 lineárně nezávislé řešení

$$(-1,-1,-1,-1)^T \xleftarrow{K-E} (1,0,0,0)^T$$

$$(-1,-1,0,0)^T \longleftarrow (0,0,1,0)^T$$

Vezmeme tedy bázi, jimi tvořenou

$$B = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Matici R můžeme volit

$$R = (id)_{\varepsilon, B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(16)

Příklad. 4. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}NP$.

Spočítáme charakteristický polynom:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9-\lambda & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1-\lambda & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{ke 4. řádku přičteme } 3\times 3. \text{ řádek}}{\overset{\text{k 2. řádku přičteme } 2\times 3. \text{ řádek}}{=}} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda & 0 \\ -3 & -4 & -1-\lambda & 4 \\ 0 & -3 & 3-3\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-2\lambda & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 4 \\ -3 & 3-3\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1-\lambda & 2-2\lambda & 0 \\ -3 & 3-3\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \ldots\ldots = (\lambda-1)^4$$

$\lambda = 1$ je vl. číslo algebraické násobnosti 4.

Spočítáme vlastní vektory:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -2 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektory jsou $(-2b, a, 3b, a)^T =$

$$= a(0,1,0,1)^T + b(-2,0,3,0)^T$$

Příklad. 4. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}NP$.

Zjistíme pro která $a, b \in \mathbb{R}$ je řešitelná soustava

$$(N-E)\,x = \begin{pmatrix} -2b \\ a \\ 3b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & 0 & -2 & a+4b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

Soustava má řešení, právě když $a + 6b = 0$.

Tedy neexistují dva lin. nezávislé řetězce délky 2 pro vl. číslo 1. Tedy

$$J \neq \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ a proto } J = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

V $\mathbb{R}^4$ tedy existuje řetězec délky 3. Tento řetězec musí začínat vlastním vektorem $(-2b, a, 3b, a)^T$ takovým, že $a + 6b = 0$.

Příklad. 4. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}NP$.

Volme $a = 6$, $b = -1$ a vlastní vektor

$$u_1 = (2, 6, -3, 6)^T.$$

Řešení rovnice $(N-E)x = u_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \text{je}$$

$$u_2 = (-1, 1, 1, 0)^T + (-2\beta, \alpha, 3\beta, \alpha)^T, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Zjistíme, pro která α, β má řešení soustava

$$(N-E)\,x = u_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -1-2\beta \\ 6 & 8 & 4 & -8 & 1+\alpha \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 1+3\beta \\ 9 & 9 & 6 & -9 & \alpha \end{array}\right) \underset{\text{jako výše}}{\overset{\text{stejné úpravy}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -1-2\beta \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 3+\alpha+4\beta \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3+\alpha+6\beta \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -1-2\beta \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3+\alpha+6\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3+\alpha+6\beta \end{array}\right)$$

Soustava má řešení, právě když

$$3 + \alpha + 6\beta = 0.$$

Příklad 4

Volme $\alpha = -3$, $\beta = 0$, $u_2 = (-1,-2,1,-3)^T$.

Potom řešení soustavy

$(N-E)x = u_2$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

je například

$$u_3 = (-1,0,1,0).$$

Tedy u_1, u_2, u_3 je řetězec délky 3 pro vl. číslo 1. Doplníme to na bázi vlastním vektorem, např. $v = (0,1,0,1)^T$.

Tedy $\chi = (u_1, u_2, u_3, v)$ je báze v $\mathbb{R}^4$ tvořená řetězcem délky 3 a délky 1. Proto zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Nx$, má v bázi χ matici

$$(\varphi)_{\chi,\chi} = J = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Matice $P = (id)_{\varepsilon,\chi} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 4

Zkoušku opět provedeme tak, že se přesvědčíme, že

$$P\,J = N\,P.$$

Jiný způsob řešení. Vzhledem k tomu, že matice N má jediné vlastní číslo, můžeme hledat řetězec maximální délky „odzadu".

Volme $z = (1, 0, 0, 0)^T$

$$(N-E)(z) = (3 \;\; 6 \;\; -3 \;\; 9)^T$$

$$(N-E)\begin{pmatrix}3\\6\\-3\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-18\\9\\-18\end{pmatrix}$$

Tyto vektory tvoří řetězec délky 3

$$\begin{pmatrix}-6\\-18\\9\\-18\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3\\6\\-3\\9\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Doplníme jej na bázi vlastním vektorem $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Dostaneme bázi δ a volíme

$$P = (id)_{\varepsilon\delta} = \begin{pmatrix}-6 & 3 & 1 & 0\\ -18 & 6 & 0 & 1\\ 9 & -3 & 0 & 0\\ -18 & 9 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$