2. cvičení z LA II - afinní geometrie a bilineární formy, 2023

Příklad. 1. V $\mathbb{R}^4$ určete vzájemnou polohu rovin

$$\pi : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \quad 5x_1 - x_2 + 2x_4 = 3,$$
$$\rho : x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3, \quad 2x_2 - x_3 + x_4 = -2.$$

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^4$ určete vzájemnou polohu roviny

$$\rho : \ [3, -1, 0, 0] + s(-1, 1, 1, 0) + t(2, 1, 0, 1)$$

a přímek p, q a r, které mají parametrická vyjádření

a) $p : [7, 4, 2, 3] + a(5, -2, -3, 1)$,
b) $q : [1, 2, 3, 4] + b(1, 5, 3, 2)$,
c) $r : [1, 2, 3, 4] + c(1, 1, 1, 1)$.

Příklad. 3. V $\mathbb{R}^3$ najděte přímku p, která protíná mimoběžky $r : \ [1, 2, -1] + s(1, -1, 1)$ a $q : \ [0, 9, -2] + t(1, 0, 0)$ (taková přímka se nazývá příčka mimoběžek) a je rovnoběžná s vektorem $v = (1, 2, 0)$.

Návod. Přímka p leží v rovině určené přímkou r a vektorem v. □

Příklad. 4. V $\mathbb{R}^4$ najděte přímku p, která protíná přímku $q : \ [1, 2, 0, 0] + s(1, 1, 1, 0)$ a rovinu $\rho : \ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \quad x_1 + x_3 = 7$ a prochází bodem $B = [1, 3, 2, 1]$.

Příklad. 5. V $\mathbb{R}^4$ jsou zadány dvě roviny

$$\pi : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad x_2 - x_4 = 2$$
$$\rho : x_1 - x_3 = 3, \quad x_2 + x_4 = 5.$$

Najděte přímku p rovnoběžnou s rovinou ρ, protínající rovinu π a procházející bodem $A = [0, 0, 1, 2]$.

Návod. Přímka p leží v rovině rovnoběžné s rovinou ρ a procházející bodem A. □

Řešení. Průsečík roviny π s přímkou p je $[-1, 2, 0, 0]$. □

Příklad. 6. V $\mathbb{R}^4$ jsou zadány rovina a dvě přímky

$$\theta : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9,$$
$$q : [3, 2, 3, 8] + t(1, 2, -1, -2),$$
$$r : [1, 1, 9, 5] + s(2, 1, -2, -1).$$

Najděte přímku p rovnoběžnou s rovinou θ a protínající obě přímky q a r.

Návod. Testujeme, zda je vektor $Q - R$, kde $Q \in q$ a $R \in r$, rovnoběžný s rovinou θ. □

Příklad. 7. Zjistěte, zda následující funkce jsou bilineární formy. Pokud ano, zjistěte zda jsou symetrické nebo antisymetrické, a napište matici této formy ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}_2[x]$.

a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 - 5x_2,$
b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 5x_2y_2,$
c) $h : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R},\ h(p,q) = p(1)q(2) + 4p(3)^2q(4),$
d) $k : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R},\ k(p,q) = p(1)q(2) + 4p(3)q'(8).$

Zde $q'(8)$ značí derivaci polynomu q v čísle 8.

Příklad. 8. K symetrické matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ najděte diagonální matici D kongruentní s A. Současně najděte regulární matici P takovou, že $D = P^TAP$.

Poznámka. Matice P není určena jednoznačně.

Příklad. 9. Symetrická bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má v souřadnicích standardní báze vyjádření $f(u,v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_3y_1$. ($x$ a y jsou souřadnice vektorů u a v ve standardní bázi.) Najděte v $\mathbb{R}^3$ nějakou její polární bázi, tj. bázi β v jejíž souřadnicích má f vyjádření $f(u,v) = b_{11}\bar{x}_1\bar{y}_1 + b_{22}\bar{x}_2\bar{y}_2 + b_{33}\bar{x}_3\bar{y}_3$. Toto vyjádření rovněž najděte. ($\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou souřadnice vektorů u a v v bázi β.)

Poznámka. Polární báze není určena jednoznačně. Jednoznačně je určen pouze počet kladných a záporných koeficientů v zápisu bilineární formy v souřadnicích polární báze.