4. cvičení z LA II - bilineární a kvadratické formy, 2023

Příklad. 1. Uvažujme kvadratickou formu $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$. Pomocí definice napište matici její symetrické bilineární formy v bázi $\alpha = ((1,2),(3,-1))$.

Příklad. 2. Kvadratická forma $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má ve standardní bázi vyjádření

$$f(u) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2.$$

Najděte její vyjádření v bázi $\alpha = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Dále najděte nějakou její polární bázi, tj. bázi β, v jejíž souřadnicích je $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2$, kde čísla $b_{ii} = 0$, 1 nebo -1. Určete signaturu f.

Příklad. 3. Ve standardních souřadnicích napište nějakou kvadratickou formu $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je pozitivně definitní na podprostoru V a negativně definitní na podprostoru W, kde

$$V = [(1,0,2),(0,1,1)], \quad W = [(1,1,0)].$$

Příklad. 4. Definují následující symetrické bilineární formy skalární součin na $\mathbb{R}^3$? Pokud ano, napište pro ně Cauchyovu nerovnost.

a) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
b) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
c) $f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2$,
d) $f(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.

Příklad. 5. Pomocí skalárního součinu dokažte:

(1) V rovnoběžníku je součet druhých mocnin uhlopříček roven součtu druhých mocnin všech stran.
(2) Rovnoběžník je kosočtverec, právě když jsou jeho uhlopříčky na sebe kolmé.

Příklad. 6. Najděte ortonormální bázi podrostoru

$$S = [(1,2,-1,3,1),\ (5,2,-1,7,1),\ (2,-1,2,-4,-2)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem. Použijte k tomu prvně Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces a potom získané vektory ortogonální báze vynormujte (tj. vydělte normou, abyste získali vektory jednotkové velikosti).

Příklad. 7. V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální doplněk podprostoru

$$V = [(1,2,-1,-3,3),\ (1,-2,3,1,-1)]\,.$$

Příklad. 8. Spočtěte kolmou projekci vektoru $u = (2,11,-3,-4,7)$ do podprostoru V a jeho ortogonálního doplňku $V^{\perp}$ z předchozího příkladu.

Příklad. 9. Uvažujme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem a nadrovinu ρ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Pomocí skalárního součinu napište předpis lineárního zobrazení $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které je kolmou projekcí do nadroviny ρ. (Předpokládáme, že $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.)

Příklad. 10. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Úloha na další procvičení

Příklad. Kvadratická forma $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ má ve standardní bázi vyjádření

$$f(u) = 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3 - 8x_2x_4 + 8x_3x_4.$$

Najděte nějakou bázi β, v jejíž souřadnicích je $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2 + b_{44}\bar{x}_4^2$, kde čísla $b_{ii} = 0$, 1 nebo -1.