10. cvičení z lineární algebry II, 2021

Příklad. **1.** Najděte singulární rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a spočítejte její pseudoinverzi.

$$\underset{3\times 2}{A} = \underset{3\times 3}{P}\ \underset{3\times 2}{S}\ \underset{2\times 2}{Q^*}$$

P, Q jsou ortogonální $\quad PP^T = E$, $\quad QQ^T = E$

$$Q^* = Q^T$$
$$P^* = P^T$$

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$s_1, s_2 \geq 0$

$s_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $s_2 = \sqrt{\lambda_2}$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ jsou vl. čísla matice A^*A

$$A^*A = A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4$$
$$= \lambda^2 - 15\lambda + 50$$
$$= (\lambda - 5)(\lambda - 10)$$

$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = 10$

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q spočítáme pomocí vl. vektorů matice A^*A $\quad 2\times 2$

Najdeme ortonormální bázi $\alpha = (u_1, u_2)$ v $\mathbb{R}^2$ tvořenou vl. vektory k $\lambda_1 = 5$ a $\lambda_2 = 10$.

$$(A^*A - 5E) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^*A - 10E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = (id)_{\varepsilon_2, \alpha} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$A = PSQ^* \qquad / \cdot Q$$

$$A\,Q = P \cdot S \underbrace{Q^* Q}_{E}$$

$P = (v_1\, v_2\, v_3)$

$AQ = P \cdot S$

$\boxed{}$

$$A u_1 = v_1 \sqrt{\lambda_1} = v_1 \cdot \sqrt{5}$$

$$s_1 P = v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} A u_1$$

$$A u_2 = v_2 \sqrt{\lambda_2}$$

$$s_2 P = v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} A u_2$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$v_1 \perp v_2 \qquad \|v_1\| = \|v_2\| = 1$

3. sloupec matice P vybereme mezi vektory $v_3 \perp v_1, v_2$

$$\|v_3\| = 1$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 3y_1 + 4y_3 &= 0 \\ 4y_1 + 5y_2 - 3y_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$v_3 = a(-4,5,3) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(-4,5,3)$$

$$\beta = (v_1, v_2, v_3)$$

$$P = (id)_{\varepsilon_3,\beta} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\sqrt{2} & -4/5\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 4/5 & -3/5\sqrt{2} & 3/5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sing. rozklad matice A je

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\sqrt{2} & -4/5\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 4/5 & -3/5\sqrt{2} & 3/5\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{Q^T}$$

Pseudoinverze k $A^{(-1)}$

$$A = P S Q^*$$

$$A^{(-1)} = \text{"}(P S Q^*)^{(-1)} = (Q^*)^{(-1)} \cdot S^{(-1)} \cdot P^{(-1)}\text{"} \underset{\text{def}}{=} Q S^{(-1)} P^*$$

$$-3/25 + 8/50$$

$$A^{(-1)} = Q S^{(-1)} P^* = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix}}_{S^{(-1)}} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 4/5\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -3/5\sqrt{2} \\ -4/5\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 3/5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5\sqrt{2} & 0 \\ 2/5 & 1/5\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot P^T = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 2 & 10 & -14 \\ 16 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

Jinak a rychleji :

$$A^* A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{je regulární.}$$

Proto na výpočet pseudoinverze

je lepší použít „vzorec"

$$A^{(-1)} = (A^*A)^{(-1)} \cdot A^*$$

$$= (A^T A)^{-1} \cdot A^T$$

$$= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 2 & 10 & -14 \\ 16 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

Zkouška: $A^{(-1)} A$ $\quad 2 \times 2$

matice kolmé projekce $\mathbb{R}^2$ na $\overset{\mathbb{R}^2}{\overset{\shortparallel}{(\ker \varphi)^\perp}}$

$$\{x,\ Ax = 0\} \quad \begin{matrix} \varphi(x) = Ax \\ = \{0\} \end{matrix}$$

Proto musí být

$$A^{(-1)} A = E \qquad 2 \times 2$$

$$\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 2 & 10 & -14 \\ 16 & 5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ale $A \cdot A^{(-1)} \neq E \qquad 3 \times 3$

Příklad. 2. Najděte singulární rozklad matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a spočítejte její pseudoinverzi.

$$B^* B = B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 13 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$h(B) = 2$$

B^*B má určitě vl. čísla 0

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 4 \\ -1 & 13-\lambda & 3 \\ 4 & 3 & 10-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 25\lambda^2 - 150\lambda$$

$$= \lambda(15-\lambda)(\lambda-10)$$

Vlastní čísla $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 15$, $\lambda_3 = 0$

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{pmatrix}$$

Q 3×3 sloupce jsou tvořeny souřadnicemi vektorů ortonorm. báze, které jsou vlastní k vl. číslům 10, 15 a 0.

$$u_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad u_3 = \frac{1}{5\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$Q = (u_1, u_2, u_3)$$

$$Q = (id)_{\varepsilon_3, \alpha} = \begin{pmatrix} 3/5\sqrt{2} & 1/5\sqrt{3} & 11/5\sqrt{6} \\ -4/5\sqrt{2} & 7/5\sqrt{3} & 2/5\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Sloupce matice P 2×2

budou

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} B u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} B u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}^{P} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{pmatrix} Q^{T}$$

13⁰³ Pseudoinverze k B 2×3

$B^{(-1)}$ má rozměry 3×2 a můžeme

lze spočítat z definice

$$B^{(-1)} = Q\, S^{(-1)} P^T = \underset{3\times 3}{Q} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{2\times 2}{P^T}$$

$$= \frac{1}{150} \begin{pmatrix} 16 & 13 \\ -38 & 16 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$$

Jak jednodušeji ?

$B^* B$ je 3×3

s vl. číslem 0 $\Rightarrow$ $\det B^* B = 0$

$\Rightarrow$ $B^* B$ nemá inverzní matici.

nemá smysl použít „vzoreček"

$$B^{(-1)} = (B^* B)^{(-1)} B^*$$

Musíme použít JINÝ VZOREČEK

$$BB^* = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

2×2

Tato matice má $\det \neq 0$, proto má inverzi.

Ten dobrý vzoreček je

$$\underline{B^{(-1)} = B^* (BB^*)^{(-1)}}$$

$$= B^* (BB^*)^{-1} = B^T (BB^T)^{-1}$$

$$B^{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{150} \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{150} \begin{pmatrix} 16 & 13 \\ -38 & 16 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$$

$B^* B$ není z $B B^*$

Zkouška v tomto případě

$\begin{pmatrix} \ & \ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}$ $B \cdot B^{(-1)} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$ 2×2

Proto $B B^{(-1)} = E$!

kolmá projekce $\mathbb{R}^2$ na im $\varphi = \mathbb{R}^2$

$\varphi(x) = Bx$

Ale $B^{(-1)} B \neq E$!

3×3

Příklad. 3. Ukažte, že soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

$$Ax = b$$

nemá řešení. Pomocí pseudoinverzní matice najděte všechny nejlepší aproximace řešení této soustavy.

Zkusíme řešit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$1 \qquad -1$$

$$h(A) = 3 < 4 = h(A|b)$$

Soustava nemá řešení.

Nejlepší aproximace jsou $x \in \mathbb{R}^3$

$\|Ax - b\|$ je minimální

$\iff$ $\|Ax - b\|^2$ je minimální

Z teorie víme, že řešení x najdeme jako

$$x = A^{(-1)} b$$

případná další řešení jsou

$$A^{(-1)} b + y, \text{ kde } Ay = 0$$

$h(A) = 3$ $\quad Ay = 0$ pouze pro $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Spočítáme $A^{(-1)}$

$A \quad 4 \times 3 \qquad A^T \quad 3 \times 4$

Pseudoinverzi chceme počítat z matice $A^T \cdot A \quad (3 \times 3)$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det A^T A$

$= 9 \cdot 4 - 3 - 3 > 0$

$= 30$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 1 & 11 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$(-1)^{1+2}(-1) = 1$

počítáme z alg. doplňků

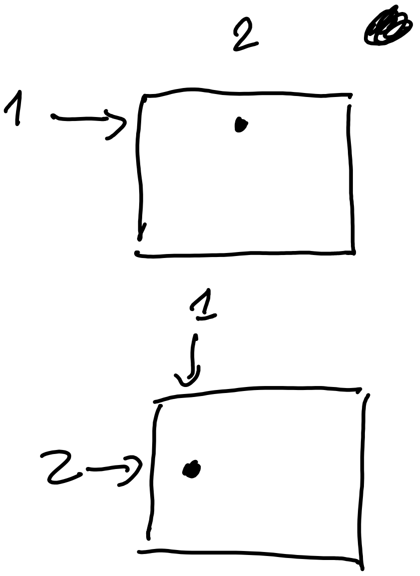
$$C^{-1} = \frac{\left(\tilde{c}_{ij}\right)^T}{\det C} \qquad C = (c_{ij})$$

$\tilde{c}_{ij}$ = alg. doplněk k c_{ij}

$= (-1)^{i+j} \det C_{ij}$

↓

matice vzniklá z C vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce



C^{-1}

C

$$\underline{x} = A^{(-1)} b = (A^T A)^{-1} (A^T b) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 1 & 11 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{(-1)}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 1 & 11 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 38 \\ 28 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 19 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix}}}$$

Příklad. 4. Úloha lineární regrese. V rovině jsou dány body

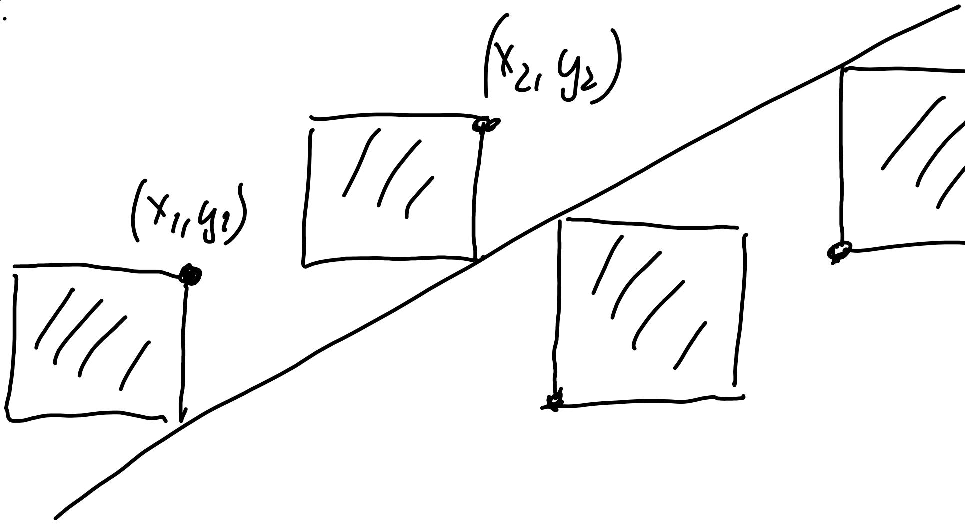
$$[x_1, y_1) = [-1, 1], \quad [x_2, y_2] = [0, 0], \quad [x_3, y_3] = [1, 1], \quad [x_4, y_4] = [2, 3].$$

Těmito body proložte přímku $y = px + q$ tak, aby součet čtverců

$$\sum_{i=1}^{4} (y_i - (px_i + q))^2$$

byl minimální.

$y = px + q$



Chceme, aby $\sum_{i=1}^{4} \left(y_i - (px_i + q)\right)^2$

byl minimální.

$\left\|A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - b\right\|^2$ byl minimální. $b - A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$$px_1 + q = y_1 \qquad \left(y_1 - (px_1 + q)\right)^2$$
$$px_2 + q = y_2 \qquad + \left(y_2 - (px_2 + q)\right)^2$$
$$px_3 + q = y_3 \qquad +$$
$$px_4 + q = y_4$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \underset{b}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}$$

Kandidáti x_i, y_i

$$\begin{aligned} -p + q &= 1 \\ q &= 0 \\ p + q &= 1 \\ 2p + q &= 3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hledáme $A^{(-1)}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det A^T A = 20$

$$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 14 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}$$

Hledaná přímka je

$$y = 0{,}7x + 0{,}9$$

Obrázek – v ISu