MB141 – 9. cvičení
Lineární modely

Martin Čadek

Jarní semestr 2020

A

Příklad 1. Farmář chová ovce. Jejich porodnost je dána pouze věkem a je průměrně 2 ovce na jednu ovci mezi jedním a dvěma lety věku, 4 ovce na jednu ovci mezi dvěma a třemi lety věku a 2 ovce na jednu ovci mezi třemi a čtyřmi roky věku. Ovce do jednoho roku nerodí. Z roku na rok umře vždy polovina ovcí a to rovnoměrně ve všech věkových skupinách. Po 4 letech posílá farmář ovce na jatka. Jakou část jehňátek může každý rok prodat, aby mu velikost stáda zůstávala stejná? V jakém věkovém poměru budou rozděleny počty ovcí v jednotlivých věkových skupinách?

V roce n máme

$x_1(n)$ .... počet ovcí do 1. roku

$x_2(n)$ počet ovcí mezi 1 a 2 roky

$x_3(n)$ počet ovcí mezi 2 a 3 roky

$x_4(n)$ počet ovcí mezi 3 a 4 roky

V roce $n+1$ máme

$$x_1(n+1) = 2x_2(n) + 4x_3(n) + 2x_4(n)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2(n+1) &= \tfrac{1}{2}x_1(n) \\ x_3(n+1) &= \tfrac{1}{2}x_2(n) \end{aligned}\right\} \text{polovina ovcí umře, polovina přežije}$$

Příklad 1. Farmář chová ovce. Jejich porodnost je dána pouze věkem a je průměrně 2 ovce na jednu ovci mezi jedním a dvěma lety věku, 4 ovce na jednu ovci mezi dvěma a třemi lety věku a 2 ovce na jednu ovci mezi třemi a čtyřmi roky věku. Ovce do jednoho roku nerodí. Z roku na rok umře vždy polovina ovcí a to rovnoměrně ve všech věkových skupinách. Po 4 letech posílá farmář ovce na jatka. Jakou část jehňátek může každý rok prodat, aby mu velikost stáda zůstávala stejná? V jakém věkovém poměru budou rozděleny počty ovcí v jednotlivých věkových skupinách?

B

$x_4(n+1) = \frac{1}{2} x_3(n)$. Dostáváme Leslieho populační model

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \\ x_4(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \end{pmatrix}$$

Prodejem farmář mění prvek v 2. řádku a 1. sloupci Leslieho matice.

Příklad 1 Hledáme $a \in (0,1)$ tak, aby matice

(C)

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

měla vlastní číslo 1. To znamená, že musí být $\det(L - 1 \cdot E) = 0$. Spočítáme proto tento determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. řádku}}{\overset{\text{Lapl. rozvoj}}{\underset{\text{podle}}{=}}} (-1)^{2+1} a \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -a\left(2 + \frac{1}{2} + 2\right) + (-1)(-1) = 1 - \frac{9}{2}a = 0, \quad \text{tedy} \quad a = \frac{2}{9}.$$

Farmář může prodat $\frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$ z ~~kd~~ ovcí, které se mu každý rok narodí. Rozdělení ovcí do jednotlivých věkových skupin se ustálí v poměrech daných

Příklad 1

D

souřadnicemi vlastního vektoru k vl. číslu 1.

Výpočet vlastního vektoru $(L-E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 \\ \frac{2}{9} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Tento tvar nám stačí k výpočtu. Vlastní vektor je $(18, 4, 2, 1)$

Spočítáme ho z 2. až 4. řádku. Dosazením do 1. řádku se přesvědčíme, že soustavu splňuje. Tedy ~~po~~ rozdělení počtu ovcí se ustálí v poměrech

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 18 : 4 : 2 : 1.$$

A

Příklad 2. Které z následujících matic jsou primitivní?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Matice M je primitivní, jestliže nějaká její mocnina

$$M^k = \underbrace{M \cdot M \cdot M \cdot \ldots \cdot M}_{k \text{ krát}}$$

má všechny prvky kladné.

<u>Matice A není primitivní</u>, neboť všechny její mocniny budou mít v 2. řádku a 1. sloupci 0.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7/8 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 15/16 \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix}, \text{ atd}$$

<u>Matice B je primitivní</u>, neboť

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cancel{0}\ 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

B

Příklad 2. Které z následujících matic jsou primitivní?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Matice C není primitivní. Ve všech jejích mocninách bude v pravém horním rohu $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C^3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},\ \text{atd.}$$

Matice D je primitivní.

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Příklad 3. V jezeru žije populace bílých ryb. Předpokládáme, že druhého roku se dožije 20 % plůdku a od tohoto věku jsou ryby schopné se reprodukovat. Z mladých ryb přežije do třetího roku do stadia velké ryby 60 %. Úmrtnost velkých ryb je zanedbatelná. Dále předpokládáme, že roční přírustek ryb je trojnásobkem počtu ryb schopných reprodukce. Tato populace by evidentně jezírko přeplnila. Rovnováhu chceme dosáhnout nasazením štik. Každá štika sní ročně 500 velkých ryb. Kolik štik máme do jezera nasadit, aby populace ryb stagnovala?

A

Označme počet kusů plůdku p, počet mladých ryb m a počet velkých ryb v. Jestliže předpokládáme, že štiky ponechají v jezeru $\tau \cdot v$ velkých ryb, pak přechod počtů z roku na rok je

$$\begin{pmatrix} p \\ m \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3m + 3v \\ 0{,}2p \\ 0{,}6m + \tau v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ m \\ v \end{pmatrix}$$

což dává Leslieho matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & \tau \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. V jezeru žije populace bílých ryb. Předpokládáme, že druhého roku se dožije 20 % plůdku a od tohoto věku jsou ryby schopné se reprodukovat. Z mladých ryb přežije do třetího roku do stadia velké ryby 60 %. Úmrtnost velkých ryb je zanedbatelná. Dále předpokládáme, že roční přírustek ryb je trojnásobkem počtu ryb schopných reprodukce. Tato populace by evidentně jezírko přeplnila. Rovnováhu chceme dosáhnout nasazením štik. Každá štika sní ročně 500 velkých ryb. Kolik štik máme do jezera nasadit, aby populace ryb stagnovala?

B

Chceme najít τ takové, že $\det(L - 1 \cdot E) = 0$, tj. vlastní číslo matice L je 1.

$$\det(L-E) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0{,}2 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & \tau-1 \end{vmatrix} = (\tau-1) + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 - 3 \cdot 0{,}2(\tau-1) = 0$$

$$(\tau-1)(1-3\cdot 0{,}2) + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0$$

$$0{,}4 \cdot (\tau-1) = -0{,}36$$

$$1-\tau = 0{,}9$$

Tedy $\tau = \frac{1}{10}$. To znamená, že x štik musí sníst $0{,}9$ velkých ryb, tj

$$500x = 0{,}9v$$

$$x = \frac{0{,}9v}{500}.$$

Tj. jednu štiku nasadíme na $\frac{500}{0{,}9} \doteq 556$ velkých ryb.

A

Příklad 4. Roční Albertek Einsteinů staví se 4 kostkami věž. Ta mu ale každou chvilku spadne. Když ji má čerstvě spadlou, vezme nějakou kostku a snaží se ji postavit na některou jinou, což se mu podaří s pravděpodobností 1/2. Když má věž ze dvou nebo tří kostek, snaží se postavit další kostku na její vrchol, což se mu opět s pravděpodobností 1/2 podaří. Pokud má věž ze čtyř kostek, radostně zatleská a věž zboří. Takto pokračuje pořád dokola. Maminka se na něj po dostatečně dlouhé době přijde podívat. Jaká je pravděpodobnost, že uvidí stát věž o čtyřech kostkách?

Jde o Markovův proces, kde 4 stavy jsou popsány výškou věže 1, 2, 3 nebo 4. Proces popíšeme pomocí stochastické matice $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{4}$, kde p_{ij} = pravděpodobnost, že přejdeme ze stavu j do stavu i.

Ze zadání vyčteme $p_{21} = \frac{1}{2}$, $p_{32} = \frac{1}{2}$, $p_{43} = \frac{1}{2}$, $p_{14} = 1$.

Zadání dále říká, že $p_{11} = \frac{1}{2}$. Neříká však nic o tom, zda když se Albertovi nepodaří dát třetí kostku a 2. kostku, zda celá věž spadne nebo zda

Příklad 4. Roční Albertek Einsteinů staví se 4 kostkami věž. Ta mu ale každou chvilku spadne. Když ji má čerstvě spadlou, vezme nějakou kostku a snaží se ji postavit na některou jinou, což se mu podaří s pravděpodobností 1/2. Když má věž ze dvou nebo tří kostek, snaží se postavit další kostku na její vrchol, což se mu opět s pravděpodobností 1/2 podaří. Pokud má věž ze čtyř kostek, radostně zatleská a věž zboří. Takto pokračuje pořád dokola. Maminka se na něj po dostatečně dlouhé době přijde podívat. Jaká je pravděpodobnost, že uvidí stát věž o čtyřech kostkách?

B

zůstane věž výšky 2. Předpokládejme, že spadne celá. Pak $p_{12} = \frac{1}{2}$ a $p_{22} = 0$. Analogicky doplníme $p_{13} = \frac{1}{2}$, $p_{23} = 0$, $p_{33} = 0$. Máme tedy Markovovu matici

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spočítáme vlastní vektor k vlastnímu číslu 1. Ten nám dá pravděpodobnosti, s kterými bude mít věž po velkém počtu

Příklad 4

C

výšku 1, 2, 3 a 4. Řešíme $(P-E)x = 0$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Stejně jako v 1. příkladu použijeme k řešení 2. až 4. řádek.

Dostaneme řešení $a \cdot (8, 4, 2, 1)$. Aby to byl pravděpodobnostní vektor (součet všech souřadnic roven 1), vezmeme $a = \frac{1}{15}$. Tedy pravděpodobnosti, že maminka uvidí věž o výšce 1, 2, 3, 4 jsou postupně

$$\frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}.$$

Příklad 5. Rodina Novákova každoročně jezdí na celý srpen na dovolenou. Buď naloží auto kempingovým vybavením a cestuje po Evropě, nebo naloží kola a jedou k babičce na Vysočinu. Každý rok se rozhodují podle toho, jak trávili dovolenou poslední dva roky, a to částečně náhodně za použití klasické kostky. Rozhodují se podle následujících pravidel.

A

- Pokud byli poslední dva roky kempovat po Evropě, jedou na Vysočinu.
- Pokud byli poslední dva roky na Vysočině, tak jedou po Evropě.
- Pokud byli loni kempovat po Evropě a předloni u babičky, pak hází kostkou, a když padne liché číslo, tak jedou po Evropě, a když sudé číslo, tak jedou na Vysočinu.
- Pokud byli loni na Vysočině a předloni po Evropě, pak hází kostkou. Když padne 1 nebo 2, pak jedou na Vysočinu, jinak jedou po Evropě.

Tímto způsobem se o dovolené rozhodují celý život. V srpnu letošního roku je přijel do místa jejich bydliště navštívit kamarád, s kterým se neviděli po mnoho let. Soused, který věděl, že jsou buď na Vysočině nebo cestují po Evropě, ale nevěděl, kde byli poslední roky, jej poslal na Vysočinu. Určete, jaká je pravděpodobnost, že tam rodinu Novákovu najde.

Důležité je si uvědomit, že stavy tohoto procesu jsou dány tím, kde byli Novákovi v posledních dvou letech.

Příklad 5

B

EE ... předloni v Evropě, loni v Evropě

EV ... předloni v Evropě, loni na Vysočině

VE ... předloni na Vysočině, loni v Evropě

VV ... předloni i vloni na Vysočině

Markovova matice P tohoto procesu podle zadání je

$$\begin{array}{cccc|c} EE & EV & VE & VV & \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & 0 & EE \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & EV \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 & VE \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & VV \end{array}$$

Pravděpodobnost, že po mnoha letech budou na Vysočině, je dána součtem složek EV a VV v pravděpodobnostním vektoru, který je vlastním vektorem k vl. číslu 1.

Příklad 5

C

Řešíme rovnici $(P-E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dostáváme řešení $a \cdot (3, 6, 6, 2)$

Příslušný pravděpodobnostní vektor je

$$\left(\underset{EE}{\frac{3}{17}}, \underset{EV}{\frac{6}{17}}, \underset{VE}{\frac{6}{17}}, \underset{VV}{\frac{2}{17}} \right)$$

Pravděpodobnost, že Novákovi budou na Vysočině je

$$\frac{6}{17} + \frac{2}{17} = \frac{8}{17}.$$

A

Příklad 6. Populační model je dán Leslieho maticí

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro která $a \in [0, 1]$ populace expanduje, pro která směřuje k vyhynutí a pro která se stabilizuje?

Z teorie víme, že Leslieho matice má jediné kladné reálné vlastní číslo λ. Jestliže $\lambda < 1$, populace postupně vymírá, jestliže $\lambda > 1$, populace expanduje a jestliže $\lambda = 1$, populace se stabilizuje. Proto musíme spočítat charakteristický polynom a zjistit, pro která a má kořen < 1, pro která > 1 a pro která kořen 1.

$$\det(L - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & a & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + a + \frac{1}{2}\lambda$$

Příklad 6. Populační model je dán Leslieho maticí

B

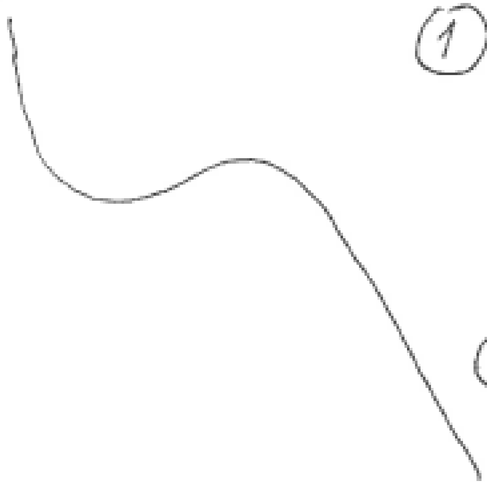
$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro která $a \in [0,1]$ populace expanduje, pro která směřuje k vyhynutí a pro která se stabilizuje?

Polynom $p(\lambda) = -\lambda^3 + a + \frac{1}{2}\lambda$ má pro $\lambda = 1$ hodnotu

$p(1) = -1 + a + \frac{1}{2} = a - \frac{1}{2}$

Dále pro velké hodnoty λ je $p(\lambda) < 0$, neboť graf polynomu 3. stupně se záporným koeficientem u λ^3 vypadá nějak takto. Tedy:



1. když je $p(1) = a - \frac{1}{2} > 0$, tj $a > \frac{1}{2}$ má polynom p kořen v intervalu $(1, \infty)$.

2. když je $p(1) = a - \frac{1}{2} < 0$, tj $a < \frac{1}{2}$ má polynom p kořen $\lambda \in (0,1)$

$p(0) = a \geq 0$

Příklad 6 ③ Pro $p(1) = a - \frac{1}{2} = 0$, má (C)

p kořen 1.

Odpověď na otázku v zadání:

Populace expanduje pro $a \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Populace vymře pro $a \in [0, \frac{1}{2})$.

Populace se bude stabilizovat pro $a = \frac{1}{2}$.

Poznámka: Přesvědčte se, že L je primitivní.

Platí $L^4 > 0$.