2. přednáška BILINEÁRNÍ FORMY

U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

je-li $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{K}$

lineární zobrazení, nazýváme ho

LINEÁRNÍ FORMA

BILINEÁRNÍ FORMA

$$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$$

(1) $f(\underline{au+bv}, w) = af(u,w) + b\, f(v,w)$

(2) $f(u, av+bw) = af(u,v) + b\, f(u,w)$

Příklady (1) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)x_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)x_2$$

$$= \underbrace{(a_{11}x_1 + a_{21}x_2)}_{b_1} y_1 + \underbrace{(a_{12}x_1 + a_{22}x_2)}_{b_2} y_2$$

(2) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

(3) $f: \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(p,q) = p(1) \cdot q'(2)$$

$p \longmapsto p(1)$ lin. forma

$q \longmapsto q'(2)$ lin. forma

Ne všechny bilin. formy vzniknou součinem lin. forem.

(4) $U = C[a,b]$

$F: U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Bilineární formy $\longleftrightarrow$ čtvercové matice

A matice $n \times n$ nad $\mathbb{K} = (\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C})$

$A = (a_{ij})$ zadává bilin. formu

$f: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i \cdot y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \overset{x_i a_{ij}}{\overset{\parallel}{a_{ij} x_i}} \Big) y_j$$

$$= (x_1\, x_2 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ \dots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x^T \cdot A \cdot y$$

Matice <u>bilin. formy</u> $f : U \times U \to \mathbb{K}$ v bázi α prostoru U

$\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

matice f v bázi α je $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = f(u_i, u_j)$$

Tuto matici NEZAPISUJEME

$(f)_{\alpha,\alpha}$!

Bilin. forma je svou maticí A v bázi α jednoznačně určena

$u, v \in U$ $\quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$

$$f(u, v) = f\left(\sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{f(u_i, \sum_j y_j u_j)}_{} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \underset{\substack{\| \\ a_{ij}}}{f(u_i, u_j)} \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^T A y = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha$$

$$\boxed{f(u,v) = (u)_\alpha^T \; A \; (v)_\alpha}$$

Matice bilin. formy v různých bázích

$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ bilin. forma

$\alpha = (u_1, \dots u_n)$ báze U

$\beta = (v_1, \dots v_n)$ jiná báze U

$u, v \in U \qquad (u)_\alpha = x \;, (v)_\alpha = y$

$\qquad\qquad\quad (u)_\beta = \bar{x} \;, (v)_\beta = \bar{y}$

$$f(u,v) = x^T A y = \bar{x}^T B \bar{y}$$

matice f v bázi α — matice f v bázi β

Nechť $P = (id)_{\alpha\beta}$

$$x = P\bar{x}$$
$$y = P\bar{y}$$

! $(u)_\alpha = (id)_{\alpha\beta}(u)_\beta$

$$f(u,v) = \bar{x}^T B \bar{y} = x^T A y =$$
$$= (P\bar{x})^T A (P\bar{y}) = \bar{x}^T (P^T A P)\bar{y}$$

$\forall\, \bar{x}, \bar{y}$ $\quad \bar{x} = e_i \quad \bar{y} = e_j$

$$e_i^T B e_j = b_{ij} = B_{ij}$$
$$e_i^T (P^T A P) e_j = (P^T A P)_{ij}$$

Dostaneme

$$\boxed{\begin{aligned} B &= P^T A P \\ P &= (id)_{\alpha\beta} \end{aligned}}$$

Je to něco jiné než platí pro matice lin. zobrazení.

Řekneme, že čtvercové matice A a B jsou kongruentní, jestliže existuje regulární matice P (tj. $\exists P^{-1}$, $\det P \neq 0$) tak, že

$$B = P^T A P$$

Vsuvka: Relace kongruence je EKVIVALENCE.

reflexivní: A je kongruentní s A

sym.: ~~A~~ kong. s $B \Rightarrow B$ kon. s A

tranzitivní: $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Symetrické bilin. formy

$$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\forall u, v \in U \qquad f(u,v) = f(v,u)$$

Lemma: f je symetrická $\Leftrightarrow$ matice A formy f v bázi α je symetrická

$$A = A^T \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$$

$$a_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = a_{ji}$$

Antisymetrická bilin. forma

$$f(u,v) = -f(v,u)$$

Speciálně $f(u,u) = -f(u,u) \Rightarrow f(u,u) = 0$

Antisymetrické matice

$$A^T = -A$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

CÍLEM PŘEDNÁŠKY JE DOKAZAT

VĚTA: Pro každou symetrickou bilin. formu $f: U \times U \to K$ existuje báze β prostoru U taková, že matice f v bázi β je diagonální. Tj.

$$f(u,v) = b_{11}x_1y_1 + b_{22}x_2y_2 + \dots + b_{nn}x_ny_n$$

kde $(u)_\beta = x$, $(v)_\beta = y$

matice f je $B = \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ 0 & & \ddots \; b_{nn} \end{pmatrix}$

Navíc bázi β i matici B lze najít algoritmicky

(Nejsou ale určeny jednoznačně.)

Maticová verze: Ke každé sym. matici A existuje kongruentní diagonální matice B.

$$B = P^T A P$$

kde P je regulární. Matici B a P lze nalézt opět algoritmicky.

El. řádk. operace e

$$e(A) = e(E) \cdot A$$

El. sloupc. operace $\bar{e}$

$$\bar{e}(A) = A \cdot \bar{e}(E)$$

element. mají inverse $\Rightarrow$ jsou regulární

LEMMA: Je-li e el. řádk. operace a $\bar{e}$ je stejná el. sloupcová operace, pak

$$e(E) = \bar{e}(E)^T.$$

<u>Dk</u>: (1) e 1. řádek násobíme číslem a
$\bar{e}$ 1. sloupec ——— || ———

$$e(E) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{e}(E) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e(E) = \bar{e}(E) = \bar{e}(E)^T$$

(2) e výměna 1. a 2. řádku

$\bar{e}$ ———— || ———— 1. a 2. sloupce

$$e(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{e}(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e(E) = \bar{e}(E) = \bar{e}(E)^T$$

(3) e k 2. řádku přičteme a-násobek 1. ř.

$\bar{e}$ k 2. sloupci ———— || ———— 1. sl.

$$e(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{e}(E) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e(E) = \bar{e}(E)^T$$

<u>Věta:</u> Nechť matice B vznikne ze symetrické matice A prováděním stejných řádk. a sloupcových operací. Pak bude

$$B = P^T A P$$

kde P je regulární. Tj. B a A budou kongruentní.

Důkaz: $A \rightsquigarrow P_1^T A \rightsquigarrow P_1^T A P_1$

$\rightsquigarrow P_2^T P_1^T A P_1 P_2 \longrightarrow$

$$\rightsquigarrow \underbrace{P_k^T P_{k-1}^T \cdots P_1^T A \overbrace{P_1 P_2 \cdots P_k}^{P}}_{P^T A P} = B$$

$$(P_1 P_2 \cdots P_k)^T = P_k^T P_{k-1}^T \cdots P_1^T$$

ALGORITMUS

nalezne pro každou sym. bil. formu $f: U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ bázi B, v níž má f diagonální matici.

nějaká báze $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$. matice f k α je $A = (a_{ij})$

$\downarrow i$

$$i \longrightarrow \begin{array}{c|c} a_{ij} & u_i \\ \hline u_j & \end{array} = \begin{array}{c|c} a_i = f(u_i, u_j) & u_i \\ \hline u_j & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \alpha^T \\ \hline \alpha & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \\ \hline u_1\, u_2 \dots u_n & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{1j} & u_1 \\ a_{2j} & u_2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} a_{1j} & u_1 \\ a_{2j}-a_{1j} & u_2-u_1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} a_{i1} & a_{i2} \\ \hline u_1 & u_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc} a_{i1} & a_{i2}-a_{i1} \\ \hline u_1 & u_2-u_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ f(u_2, u_j) = \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overset{= f(u_1, u_j)}{a_{1j}} & u_1 \\ a_{2j} & u_2 \\ \hline u_j & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} a_{1j} & \\ a_{2j}-a_{1j} & u_2-u_1 \\ \hline u_j & \end{array}\right)$$

$$\underset{= a_{2j}}{f(u_2, u_j)} - \underset{= a_{1j}}{f(u_1, u_j)} = f(u_2-u_1, u_j)$$

Stále platí

$$\begin{array}{c|c} f(u,v) & u \\ \hline v & \end{array}$$

Schématicky: po provedení stejných řádk. a sloupc. úprav dostaneme

$$\begin{array}{c|c} A & \alpha^T \\ \hline \alpha & \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} P^T A P & P^T \alpha^T \\ \hline \alpha P & \end{array}\right)$$

Požádáme tak, aby $P^T A P$ byla diagonální (viz příklad) matice B

$$\begin{array}{c|c} B & \beta^T \\ \hline \beta & \end{array}$$

$$\beta = (v_1, v_2, \dots v_n) = (u_1, u_2 \dots u_n) P = \alpha P$$

$$\beta = \alpha P \quad / ^T$$

$$\beta^T = P^T \alpha^T$$

<u>Příklad:</u> $f : U \times U \to \mathbb{R}$

$\alpha = (u_1, u_2, u_3)$

Představujte si $U = \mathbb{R}^3$

$\alpha = (e_1, e_2, e_3)$

Matice f v bázi α je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & u_1 \\ 2 & 0 & 6 & u_2 \\ 4 & 6 & 0 & u_3 \\ \hline u_1 & u_2 & u_3 & \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 10 & u_1+u_2 \\ 2 & 0 & 6 & u_2 \\ 4 & 6 & 0 & u_3 \\ \hline u_1 & u_2 & u_3 & \end{array}$$

k 1. ř.
přičteme 2. ř.

stejná sloupcová úprava ~

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 10 & u_1+u_2 \\ 2 & 0 & 6 & u_2 \\ 10 & 6 & 0 & u_3 \\ \hline u_1+u_2 & u_2 & u_3 & \end{array} \sim$$

2. a 3. řádek násobíme 2 ~

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 10 & u_1+u_2 \\ 4 & 0 & 12 & 2u_2 \\ 20 & 12 & 0 & 2u_3 \\ \hline u_1+u_2 & u_2 & u_3 & \end{array}$$

stejná sloupcová ~

$$\begin{array}{ccc|c}
4 & 4 & 20 & u_1+u_2 \\
4 & 0 & 24 & 2u_2 \\
20 & 24 & 0 & 2u_3 \\ \hline
u_1+u_2 & 2u_2 & 2u_3 &
\end{array}$$

2.ř − 1.ř

3.ř − 5×1.ř

$\sim$

$$\begin{array}{ccc|c}
4 & 4 & 20 & u_1+u_2 \\
0 & -4 & 4 & -u_1+u_2 \\
0 & 4 & -100 & -5u_1-5u_2+2u_3
\end{array}$$

stejná elem. úprava

$\sim$

$$\begin{array}{ccc|c}
4 & 0 & 0 & u_1+u_2 \\
0 & -4 & 4 & -u_1+u_2 \\
0 & 4 & -100 & -5u_1-5u_2+2u_3 \\ \hline
u_1+u_2 & -u_1+u_2 & -5u_1-5u_2+2u_3 &
\end{array}$$

$\sim$

$$\begin{array}{ccc|c}
4 & 0 & 0 & u_1+u_2 \\
0 & -4 & 4 & -u_1+u_2 \\
0 & 0 & -96 & -6u_1-4u_2+2u_3
\end{array}$$

stejná úprava

$\sim$

$$\begin{array}{ccc|c}
4 & 0 & 0 & u_1+u_2 \\
0 & -4 & 0 & -u_1+u_2 \\
0 & 0 & -96 & -6u_1-4u_2+2u_3
\end{array}$$

$u_1+u_2 \qquad -u_1+u_2 \qquad -6u_1-4u_2+2u_3$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix}$$

$$\beta = (u_1+u_2,\ -u_1+u_2,\ -6u_1-4u_2+2u_3)$$

$$= (u_1\ u_2\ u_3)\, P$$

$$= (u_1\ u_2\ u_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & +2 \end{pmatrix}$$

$$P = (id)_{\alpha\beta}$$

$$B = P^T A P$$

Doma si sami spočítejte, že je tomu tak.

$$(u)_\beta = x,\ (v)_\beta = y$$

$$f(u,v) = 4x_1y_1 - 4x_2y_2 - 96x_3y_3$$

$$U = \mathbb{R}^3,\quad \alpha = (e_1, e_2, e_3)$$

$$\beta = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Diagonální tvar bilin. formy f v bázi β.

Zápis f v bázi $\alpha = (e_1, e_2, e_3)$

vzhľadom súradnice $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$.

$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{pmatrix}$

$$f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$= 2\bar{x}_1\bar{y}_2 + 4\bar{x}_1\bar{y}_3 + 2\bar{x}_2\bar{y}_1 + 6\bar{x}_2\bar{y}_3 + 4\bar{x}_3\bar{y}_1 + 6\bar{x}_3\bar{y}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \beta \text{ súradnice } x, y$$

$$f(x, y) = 4x_1y_1 - 4x_2y_2 - 96x_3y_3.$$