Samoadjungované operátory

U prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$\varphi : U \to U$ je samoadj., jestliže $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$

Jak to poznáme na matici φ v ortonormální bázi

$$A^T = A \quad \text{je symetrická, jsme-li nad } \mathbb{R}$$

$$\overline{A}^T = A \quad \text{je hermitovská, jsme-li nad } \mathbb{C}$$

Označení $A^* = A^T$ nad $\mathbb{R}$

$= \overline{A}^T$ nad $\mathbb{C}$

Důležitým příkladem samoadj. operátoru je kolmá projekce na podprostor

Je-li $\varphi : U \to U$ kolmá projekce na V

$\forall u \in U$ platí $\varphi(u) \in V$

$u - \varphi(u) \perp V$

$\varphi(x) = Px$, jak poznáme na matici, že jde kolmou projekci:

$P = P^*$ neboť φ je samoadjungovaný

$\varphi \circ \varphi(u) = \varphi(u) \implies P \cdot P = P$ $\quad P^2 = P$ říkáme, že P je idempotentní

Tyto podmínky jsou nejen nutné, ale také postačující k tomu, aby P byla matice kolmé projekce na podprostor.

Věta o vl. číslech samoadj. operátorů

Je-li $\varphi : U \to U$ samoadj. operátor, pak v U existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Důsledek 1 Je-li φ samoadj. operátor, existuje systém kolmých projekcí na navzájem kolmé podprostory v U takový, že

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k$$

P_i je kolmá projekce na $\ker(\varphi - \lambda_i \, id)$.

Důsledek pro sym. bilineární formy nad $\mathbb{R}$

Je-li $f : U \times U \to \mathbb{R}$ sym. bil. forma, pak v U existuje ORTONORMÁLNÍ báze α taková, že v souřadnicích této báze je

$$f(u,v) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_n x_n y_n$$

kde $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $(v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Důkaz: Nechť $\mathcal{B}$ je nějaká ortonormální báze, matice bilin. formy v této bázi nechť je B. To je symetrická matice, která určuje samoadj. operátor $\varphi : U \to U$ v souřadnicích báze $\mathcal{B}$

$$(\varphi(u))_{\mathcal{B}} = B \cdot (u)_{\mathcal{B}}$$

$$f(u,v) = (u)_B^T B (v)_B = (u)_B^T B^T (v)_B = \langle B(u)_B, (v)_B \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \langle (\varphi(u))_B, (v)_B \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \varphi(u), v \rangle_U$$

Vztah mezi f a φ je dán rovnicí

$$\boxed{f(u,v) = \langle \varphi(u), v \rangle}$$

φ je samoadj., proto existuje v U orton. báze tvořená vlastními vektory

$$\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n) \qquad \varphi(u_i) = \lambda_i u_i$$

Spočítáme matici bil. formy f v bázi α

$$A_{ij} = f(u_i, u_j) = \langle \varphi(u_i), u_j \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \lambda_i & i = j \end{cases}$$

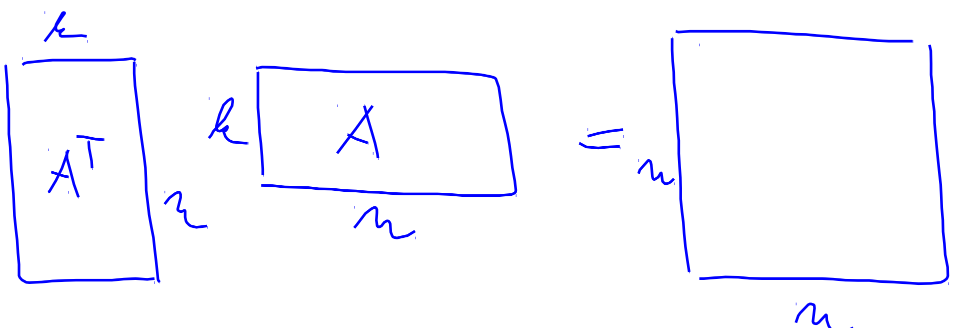
f má v bázi α vyjádření $f(u,v) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots$

SINGULÁRNÍ ROZKLAD MATICE

Příklad: Je-li A reálná matice $k \times n$, pak matice

$$A^T \cdot A$$

je symetrická matice $n \times n$.



$$(A^T A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T A$$

Totéž platí v komplexním oboru takto: $A^* A$ je hermitovská matice

<u>Lemma</u> Nechť $\varphi : U \to V$ je lin. operátor mezi prostory se skal. součinem. Pak $\varphi^*\varphi : U \to U$ (a $\varphi\varphi^* : V \to V$) jsou samoadjungované, pozitivně semidefinitní, tj.

$$\forall u \in U \qquad \langle \varphi^*\varphi(u), u \rangle \geq 0$$

Speciálně, všechna vlastní čísla $\varphi^*\varphi$ jsou nezáporná.

Dále platí $\quad \ker(\varphi^*\varphi) = \ker\varphi.$

<u>Důkaz:</u> $\varphi^*\varphi$ je samoadj:

$$\langle \varphi^*\varphi(u), v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, \varphi^*\varphi(v) \rangle$$

Pozitivní semidefinitnost

$$\langle \varphi^*\varphi(u), u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle \geq 0$$

Nezápornost vl. čísel. Nechť $\varphi^* \varphi(u) = \lambda u$

$$\lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle \varphi^* \varphi(u), u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle \geq 0$$

$\Longrightarrow \lambda \geq 0.$

Inkluse $\ker \varphi \subseteq \ker \varphi^* \varphi$ je zřejmá

je-li $u \in \ker \varphi$, tj. $\varphi(u) = 0$, je může $\varphi^* \varphi(u) = 0$, $u \in \ker \varphi^* \varphi$.

Nechť $u \in \ker \varphi^* \varphi$. Pak

$$0 = \langle \underset{\substack{\| \\ 0}}{\varphi^* \varphi(u)}, u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle \Longrightarrow \varphi(u) = 0 \Longrightarrow u \in \ker \varphi.$$

Věta o singulárním rozkladu

Nechť $A \in Mat_{k\times n}(\mathbb{K})$, kde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$. Pak existují unitární (případně ortogonální nad $\mathbb{R}$) matice P typu $k\times k$ a Q typu $n\times n$ takové, že

$$A = P\,S\,Q^*$$

kde

$$S = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_r \end{matrix} & 0 \\ \hline \underbrace{\qquad 0 \qquad}_{r} & \underbrace{\; 0 \;}_{n-r} \end{array} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \ddots \\ s_r \end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{0}\right\} k-r \\ \vphantom{0} \end{matrix}$$

a čísla $s_1, s_2, \dots, s_r$ jsou druhé odmocniny kladných vlastních čísel matice A^*A.

Důkaz: $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^r \qquad \varphi(x) = AX$

Potom $\varphi^* \circ \varphi : \mathbb{K}^n \xrightarrow[\varphi]{} \mathbb{K}^r \xrightarrow[\varphi^*]{} \mathbb{K}^n \qquad (\varphi^*\varphi)(x) = A^*AX$

Toto zobrazení je samoadjungované s nezápornými vlastními čísly:

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 \qquad \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_n = 0.$

Zvolme v $\mathbb{K}^n$ ortonormální bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_r, \dots u_n)$

$\varphi^*\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$, tvořenou vlastními vektory.

Položme

$$Q = (id)_{\varepsilon_n, \alpha}$$

Protože $\ker \varphi^*\varphi = \ker \varphi$, tak $\ker \varphi = [u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n]$.

Pro vektory u_i, $1 \leq i \leq r$ platí

$$\|\varphi(u_i)\|^2 = \langle \varphi(u_i), \varphi(u_i) \rangle = \langle \varphi^*\varphi(u_i), u_i \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle = \lambda_i > 0$$

$i \neq j$

$$\langle \varphi(u_i), \varphi(u_j)\rangle = \langle \varphi^*\varphi(u_i), u_j\rangle = \lambda_i \langle u_i, u_j\rangle = 0$$

Vektory $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_r)$ jsou nenulové a ortogonální v $\mathbb{K}^k$.

Položíme

$$v_i = \frac{\varphi(u_i)}{\|\varphi(u_i)\|} = \frac{\varphi(u_i)}{\sqrt{\lambda_i}} \qquad \|v_i\| = 1.$$

a vektory $v_1, \dots, v_r$ doplníme na ortonormální bázi $\mathbb{K}^k$. Označme ji B.

Položíme

$$P = (id)_{\mathcal{E}_k, B}$$

Platí $(\varphi)_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n} = A$

$$(\varphi)_{B, \alpha} = \Big(\overset{\sqrt{\lambda_1} v_1}{\overset{\parallel}{(\varphi(u_1))_B}} \; \overset{\sqrt{\lambda_2} v_2}{\overset{\parallel}{(\varphi(u_2))_B}} \dots \overset{\sqrt{\lambda_r} v_r}{\overset{\parallel}{(\varphi(u_r))_B}} \; \overset{0}{\overset{\parallel}{(\varphi(u_{r+1}))_B}} \dots \overset{0}{\overset{\parallel}{(\varphi(u_n))_B}} \Big)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|ccc} \sqrt{\lambda_1} & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & & \sqrt{\lambda_r} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = S$$

$$A = (\varphi)_{\varepsilon_k,\varepsilon_n} = (id)_{\varepsilon_k,\beta}\,(\varphi)_{\beta,\alpha}\,\overbrace{(id)_{\alpha,\varepsilon_n}}^{\text{matice jsou unitární nebo ortogonální}} =$$

$$= P\,S\,Q^{-1} = P\,S\,Q^{*}$$

$$Q^{-1} = Q^{*}$$

Příklad $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\det(A^*A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

u_1 je vl. vektor k $\lambda_1 = 1$ jednotkový $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

u_2 je vl. vektor k $\lambda_2 = 6$ jednotkový $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \frac{Au_1}{\sqrt{\lambda_1}} = Au_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{Au_2}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{Au_2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

v_3 je doplnění v_1, v_2 do ortonormální báze

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P = (id)_{\varepsilon_3 B} = \begin{pmatrix} 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^* = \begin{pmatrix} 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ +1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$s_1, s_2, \dots s_r$ se nazývají

singulární čísla

PSEUDOINVERZNÍ MATICE

Motivace $\varphi(x) = A x \; : \; \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$

$$\mathbb{K}^n = \ker\varphi \oplus (\ker\varphi)^\perp$$

$$\mathbb{K}^k = \operatorname{Im}\varphi \oplus (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$$

$$\varphi|_{(\ker\varphi)^\perp} : (\ker\varphi)^\perp \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi$$

$\varphi|_{(\ker\varphi)^\perp}$ je prosté a na. K $\varphi|_{(\ker\varphi)^\perp}$ existuje inverze.

Měla by být B pseudoinverzní matice $\psi(y) = By : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$

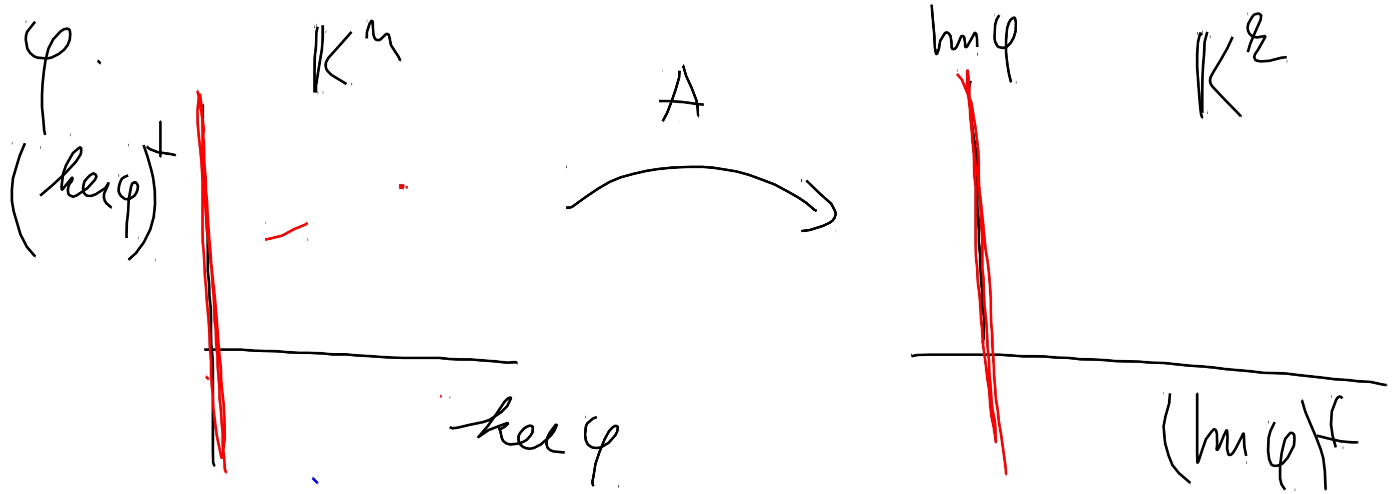
Pak musí: $\psi \circ \varphi|_{(\ker\varphi)^\perp} : (\ker\varphi)^\perp \longrightarrow (\ker\varphi)^\perp$ identita.

tj musí být

Tedy $\psi \circ \varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ by měla být kolmou projekcí na $(\ker \varphi)^\perp$. Podobně by $\varphi \circ \psi : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^k$ měla být identitou při zúžení na $\operatorname{Im} \varphi$

$$\varphi \circ \psi /_{\operatorname{Im} \varphi} : \operatorname{Im} \varphi \to \operatorname{Im} \varphi \quad \text{identita}$$

Tedy $\varphi \circ \psi : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^k$ by měla být kolmá projekce na $\operatorname{Im} \varphi$.



Motivace číslo 2

Nechť A je matice $n \times n$, která je invertibilní. Pak pro její sing. rozklad platí

$$A = P S Q^* \qquad S = \begin{pmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n \end{pmatrix} \quad s_i > 0$$

Pak pro inverzní matici k A platí

$$A^{-1} = (P S Q^*)^{-1} = (Q^*)^{-1} S^{-1} P^{-1} = (Q^*)^* S^{-1} P^*$$

$$= Q S^{-1} P^* = Q \begin{pmatrix} s_1^{-1} & & & 0 \\ & s_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n^{-1} \end{pmatrix} P^*$$

Definice pseudoinverzní matice

Nechť A je matice $k\times n$ se singulárním rozkladem

$$A = P\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^* \qquad D = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_r \end{pmatrix}$$

Potom se matice

$$A^{(-1)} = Q\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^*$$

tvaru $n\times k$ nazývá pseudoinverzní matice k matici A.

Vlastnosti pseudoinverzní matice

1. Je-li A invertibilní, je $A^{(-1)} = A^{-1}$.
2. $\left(A^{(-1)}\right)^{(-1)} = A$

(3) $A^{(-1)} \cdot A$ a $A \cdot A^{(-1)}$ jsou samoadj. matice

(4) Je-li $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$, $\varphi(x) = Ax$, $\varphi^{(-1)} : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$, $\varphi^{(-1)}(y) = A^{(-1)} y$, pak

$$\left(\varphi^{(-1)} \circ \varphi\right)(x) = A^{(-1)} A x$$

je kolmá projekce $\mathbb{K}^n$ do $(\ker \varphi)^{\perp}$, (Motivace 1)

a

$$\left(\varphi \circ \varphi^{(-1)}\right) y = A A^{(-1)} y$$

je kolmá projekce $\mathbb{K}^k$ do $\operatorname{Im} \varphi$. (Motivace 1)

5

$$A A^{(-1)} A = A$$

$$A^{(-1)} A A^{(-1)} = A^{(-1)}$$

6 Důležitá pro počítání

$$A^{(-1)} = (A^* A)^{(-1)} \cdot A^*$$

Důsledek 6 a 1 je:

Existuje-li ke matici $A^* A$ typu $n \times n$ inverzní matice, platí

$$A^{(-1)} = (A^* A)^{-1} \cdot A^*$$

Ta lze použít při počítání, když $n \leq k$.

Příklad Spočtěte $A^{(-1)}$ k $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Víme, že

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{Q^*}$$

Pak

$$A^{(-1)} = Q \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^* = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Typický příklad 6

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{(-1)} = (A^*A)^{-1} \cdot A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$