Jméno: **Hodnocení: 1. 2. 3. 4. Teorie Celkem**

A. Písemka z lineární algebry I, leden 2005 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Najděte všechny dvojice parametrů $a, b \in \mathbb{R}$, pro které je množina řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x + \ \ y + az &= 1 \\ x + ay + 2z &= 1 \\ x + \ \ y + 3z &= b \end{aligned}$$

o neznámých x, y, $z \in \mathbb{R}$ (a) prázdná, (b) nekonečná. V druhém případě soustavu vyřešte. (*3 body*)

2. Vypočtěte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$ tvaru 2005×2005. (*3 body*)

3. V $\mathbb{R}^4$ jsou dány podprostory U a V. Najděte bázi $U \cap V$ a bázi $U + V$, jestliže

$$U = [(1,1,0,-1)^T, (0,1,1,-2)^T], \quad V = [(0,1,-1,1),(1,3,0,-2)].$$

Výpočet doprovoďte slovním komentářem. (*3 body*)

4. $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení takové, že $\varphi(1,1,0,0)^T = (1,-1,1)^T$, $\varphi(0,1,1,0)^T = (1,1,1)^T$, $\varphi(1,0,0,1)^T = (2,4,2)^T$, $\varphi(0,0,1,0)^T = (0,3,0)^T$. Najděte hodnoty zobrazení φ na vektorech standardní báze e_1, e_2, e_3, e_4. Najděte bázi $\operatorname{Ker}\varphi$ a bázi $\operatorname{Im}\varphi$. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. (*3 body*)

Teoretická část

Max. počet bodů 10

1. Napište definici součtu $U + V$ dvou podprostorů ve vektorovém prostoru W. (*1 bod*)

2. Napište jeden axiom vektorového prostoru, který není splněn pro množinu $V = \mathbb{R}$, pole $\mathbb{R}$, součet $x \oplus y = x + y$ a násobení skalárem $a \odot x = a^{-1}x$. Ukažte, proč není splněn. (*1 bod*)

3. Napište přesnou formulaci věty, která dává do souvislosti hodnost matice a řešitelnost soustavy $Ax = b$. (*1 bod*)

4. $\mathbb{C}^2$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Napište nějakou jeho bázi, která obsahuje vektor $(1+i, i)$ (*1 bod*)

5. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polynomů stupně nejvýše 3 s reálnými koeficienty napište souřadnice polynomu x^2+x+1 v bázi $\alpha = (x^2 + x^3, x^3 + x, 1, x^2 + 1)$. (*1 bod*)

6. Podle definice najděte matici přechodu $(\mathrm{id})_{\beta,\alpha}$ od báze $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ k bázi $\beta = (v_1+v_2, v_2, v_1+v_2+v_3)$. (*1 bod*)

7. Napište matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $\varphi(p) = (x^2+1)p'(x)$ v bázích $\alpha = (1, x, x^2)$ a $\beta = (1, x, x^2, x^3)$. (p' je derivace polynomu p.) (*1 bod*)

8. Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární. Jestliže, $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k)$ jsou lineárně nezávislé ve V, pak $u_1, u_2, \dots,$ u_k jsou lineárně nezávislé v U. Dokažte. (*1 bod*)

9. Udejte příklad lineárního zobrazení z $\mathbb{R}_{2005}[x]$ do $\mathbb{R}_{1005}[x]$, jehož jádro má dimenzi 2000. Napište bázi jádra. (*1 bod*)

10. Předpisem $\varphi(ax^2 + bx + c) = \dots$ definujte nějaký lineární izomorfismus z $\mathbb{R}_2[x]$ do $\mathbb{R}^3$ s vlastností $\varphi(x^2 + 2x + 1) = (1, 2, 3)$. (*1 bod*)