

**B. Písemka z lineární algebry I, leden 2005 – početní část***Max. počet bodů 12*

1. Je dáno lineární zobrazení  $\varphi : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^3$  předpisem

$$\varphi((x_1, x_2, \dots, x_{10})^T) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots + x_{10} \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots + x_{10} \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + \dots + x_{10} \end{pmatrix}$$

Najděte bázi  $\text{Ker } \varphi$  a bázi  $\text{Im } \varphi$ . Výpočet doprovodte slovním komentářem. (3 body)

2. Je dána dolní trojúhelníková matice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  tvaru  $2005 \times 2005$ . Vypočtete  $A^{-1}$  a 1805.

řádek součinu  $A \cdot A$ . (3 body)

3. V  $\mathbb{R}^5$  jsou dány podprostory  $U$  a  $V$ . Najděte bázi  $U \cap V$ , jestliže  $U = [(1, 0, 1, 2, -1)^T, (2, -1, 2, 1, -1)^T, (1, 0, 0, 1, -1)^T]$  a  $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_4 + x_5 = 0\}$ . Výpočet doprovodte slovním komentářem. (3 body)

4. V  $\mathbb{R}_2[x]$  uvažujme bázi  $\varepsilon = (1, x, x^2)$  a bázi  $\alpha = (1 + 2x + x^2, 1 + x + x^2, -1 - x + 3x^2)$ . Vypočtete matici přechodu  $(id)_{\alpha, \varepsilon}$  od báze  $\varepsilon$  k bázi  $\alpha$  a s její pomocí vypočtete souřadnice polynomu  $2 + 3x + 6x^2$  v bázi  $\alpha$ . (3 body)

**Teoretická část***Max. počet bodů 10*

1. Napište definici determinantu s vysvětlením použitého označení. (1 bod)

2. Napište jeden axiom vektorového prostoru, který není splněn pro množinu  $V = (0, \infty)$ , pole  $\mathbb{R}$ , součet  $x \oplus y = x \cdot y$  (standardní součin) a násobení skalárem  $a \odot x = a \cdot x$ . Ukažte, proč není splněn. (1 bod)

3. Napište přesnou formulaci věty o dimenzích jádra a obrazu lineárního zobrazení. (1 bod)

4.  $\mathbb{C}_2[x]$  – prostor polynomů stupně nejvýše 2 s koeficienty v  $\mathbb{C}$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ . Napište nějakou jeho bázi, která obsahuje polynom  $1 + ix$ . (1 bod)

5. V prostoru reálných matic  $2 \times 2$  napište souřadnice matice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  v bázi  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . (1 bod)

6. Napište jedním předpisem  $\varphi(x_1, x_2) = \dots$  všechna lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}$ . (1 bod)

7. Napište matici lineárního zobrazení  $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(p) = (\int_0^1 xp(x)dx, p(0))$  v bázích  $\alpha = (1, x, x^2)$  a  $\beta = ((1, 0), (1, 1))$ . (1 bod)

8. Z definice lineární nezávislosti dokažte: Jestliže,  $u_1, u_2, u_3$  jsou lineárně nezávislé v  $U$ , pak  $u_1 - u_2 + u_3, u_1 + u_2, u_1 + u_3$  jsou rovněž lineárně nezávislé. (1 bod)

9. Zformulujte přesně větu o dimenzi řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. (1 bod)

10. Předpisem  $\varphi(a + ib, c + id) = \dots$  definujte nějaký lineární izomorfismus z  $\mathbb{C}^2$  do  $\mathbb{R}^4$  jako vektorových prostorů nad  $\mathbb{R}$  s vlastností  $\varphi(i, 1) = (2, 0, 0, 5)$ . (1 bod)