Domácí úkoly ke cvičení č. 1

1. Vypočtěte následující determinant z matice řádu $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{Z}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-5 & 2n-3 & 2n-1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & \dots & 2n-3 & 2n-1 & 1 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & \dots & 2n-1 & 1 & 3 \\ 7 & 9 & 11 & 13 & \dots & 1 & 3 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2n-5 & 2n-3 & 2n-1 & 1 & \dots & 2n-11 & 2n-9 & 2n-7 \\ 2n-3 & 2n-1 & 1 & 3 & \dots & 2n-9 & 2n-7 & 2n-5 \\ 2n-1 & 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-7 & 2n-5 & 2n-3 \end{vmatrix}.$$

2. V závislosti na hodnotách parametrů $x \in \mathbb{R}$ a $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ vypočtěte následující determinant z matice řádu $n+1$ nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} x & y_1 & y_1 & y_1 & \cdots & y_1 & y_1 & y_1 \\ y_1 & x & y_2 & y_2 & \cdots & y_2 & y_2 & y_2 \\ y_2 & y_2 & x & y_3 & \cdots & y_3 & y_3 & y_3 \\ y_3 & y_3 & y_3 & x & \cdots & y_4 & y_4 & y_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-2} & y_{n-2} & y_{n-2} & y_{n-2} & \cdots & x & y_{n-1} & y_{n-1} \\ y_{n-1} & y_{n-1} & y_{n-1} & y_{n-1} & \cdots & y_{n-1} & x & y_n \\ y_n & y_n & y_n & y_n & \cdots & y_n & y_n & x \end{vmatrix}.$$

3. V závislosti na hodnotě parametru $x \in \mathbb{R}$ vypočtěte následující determinant z matice řádu $n > 1$ nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & -x & -x & -x & \dots & -x & -x & -x \\ x & 0 & -x & -x & \dots & -x & -x & -x \\ x & x & 0 & -x & \dots & -x & -x & -x \\ x & x & x & 0 & \dots & -x & -x & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & x & \dots & 0 & -x & -x \\ x & x & x & x & \dots & x & 0 & -x \\ x & x & x & x & \dots & x & x & 0 \end{vmatrix}.$$

4. V závislosti na hodnotách parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ řešte soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \; - \; y + az &= b, \\ x + ay - az &= b^2, \\ ax - ay + az &= b^2. \end{aligned}$$

Proveďte kompletní diskusi řešení v závislosti na hodnotách parametrů $a, b \in \mathbb{R}$.

5. V závislosti na hodnotách parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ řešte soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + ay + az &= 1, \\ ax + ay \; + \; z &= b, \\ ax \; + \; y \; + \; z &= b^3. \end{aligned}$$

Proveďte kompletní diskusi řešení v závislosti na hodnotách parametrů $a, b \in \mathbb{R}$.

6. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ všech polynomů s reálnými koeficienty stupně nejvýše 4 najděte souřadnice polynomu $x^4 - 3x^3 + 11x^2 + x + 5$ vzhledem k bázi

$$\begin{aligned} \alpha = \big(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\ x^4 + x^3 + x^2 + x - 1, \\ x^4 + x^3 + x^2 - x - 1,\ x^4 + x^3 - x^2 - x - 1, \\ x^4 - x^3 - x^2 - x - 1\big) \end{aligned}$$

vektorového prostoru $\mathbb{R}_4[x]$.

7. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ jsou dány vektorové podprostory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ následovně. Vektorový podprostor $\mathbf{U}$ je zadán jako lineární obal vektorů $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, kde

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1,1),\ \mathbf{u}_2 = (1,1,-1,-1,1),\ \mathbf{u}_3 = (1,1,-1,-1,-1),$$

a vektorový podprostor $\mathbf{V}$ je zadán jako množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s reálnými koeficienty

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0,$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0.$$

Zjistěte průnik vektorových podprostorů $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Najděte nějakou bázi vektorového podprostoru $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

8. Mějme lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ vektorového prostoru polynomů $\mathbb{R}_3[x]$ do vektorového prostoru polynomů $\mathbb{R}_4[x]$, které je pro libovolný polynom $q(x)$ s reálnými koeficienty stupně nejvýše 3 dáno předpisem

$$\psi(q(x)) = (x^3 - x^2 + x - 1) \cdot q''(x) + (x^2 - x + 1) \cdot q'(x),$$

kde $q'(x)$ a $q''(x)$ jsou první a druhá derivace polynomu $q(x)$. Najděte matici lineárního zobrazení ψ v bázích $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ a $\beta = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}_4[x]$.

9. Nechť zobrazení $\eta : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ je lineárním zobrazením vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$ do vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$, které je na vektorech báze $\delta = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{h}_4, \mathbf{h}_5)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$, kde

$$\mathbf{h}_1 = (1, 1, 1, 1, 1),\ \mathbf{h}_2 = (1, 1, 1, 1, 0),\ \mathbf{h}_3 = (1, 1, 1, 0, 0),$$
$$\mathbf{h}_4 = (1, 1, 0, 0, 0),\ \mathbf{h}_5 = (1, 0, 0, 0, 0),$$

zadáno obrazy těchto vektorů

$$\eta(\mathbf{h}_1) = (1, 1, -1, -1),\ \eta(\mathbf{h}_2) = (1, 1, 1, -3),\ \eta(\mathbf{h}_3) = (1, 1, -3, 1),$$
$$\eta(\mathbf{h}_4) = (1, -3, 1, 1),\ \eta(\mathbf{h}_5) = (-3, 1, 1, 1).$$

Zjistěte jádro $\operatorname{Ker} \eta$ a obraz $\operatorname{Im} \eta$ lineárního zobrazení η. Najděte nějaké báze vektorových podprostorů $\operatorname{Ker} \eta$ a $\operatorname{Im} \eta$.