Domácí úkoly ke cvičení č. 10

1. Níže jsou dány lineární operátory $\varphi, \psi, \chi, \varkappa : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Každý z těchto operátorů je dán svou maticí ve standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Ověřte, že každý z operátorů $\varphi, \psi, \chi, \varkappa$ je ortogonální operátor na euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$. Analýzou vlastních čísel a vlastních vektorů matic jednotlivých operátorů zjistěte, jakou geometrickou transformaci euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$ každý ze zadaných operátorů reprezentuje. Najděte v této souvislosti pro každý z operátorů $\varphi, \psi, \chi, \varkappa$ odpovídající matici ve vhodné ortonormální bázi euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$.

(a) Operátor $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dán maticí

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Operátor $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dán maticí

$$G = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Operátor $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dán maticí

$$H = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ 3 & 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}.$$

(d) Operátor $\varkappa : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dán maticí

$$K = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{6} \\ -1 & 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Níže jsou dány lineární operátory $\zeta, \eta, \vartheta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Každý z těchto operátorů je ortogonální transformací euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$ a je charakterizován geometrickým popisem jako otočení kolem zadané přímky splňující další dodatečné požadavky. Napište matici každého z těchto lineárních operátorů ζ, η, ϑ ve standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

(a) Operátor $\zeta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je rotací kolem přímky p zadané implicitně homogenní soustavou lineárních rovnic

$$p: \; x_1 - x_2 = 0, \; x_3 = 0$$

převádějící bod $[0, 0, 2]$ na bod $\left[\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\right]$.

(b) Operátor $\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je rotací kolem přímky q zadané implicitně homogenní soustavou lineárních rovnic

$$q: \; x_2 - x_3 = 0, \; x_1 = 0$$

převádějící bod $[2, 0, 0]$ na bod $\left[0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\,\right]$.

(c) Operátor $\vartheta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je rotací kolem přímky r zadané implicitně homogenní soustavou lineárních rovnic

$$r: \; x_1 - x_3 = 0, \; x_2 = 0$$

převádějící bod $[0, 2, 0]$ na bod $\left[-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\,\right]$.

3. Nechť lineární operátory $\sigma, \tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jsou ortogonálními transformacemi euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$ charakterizovanými geometrickým popisem jako rotace o úhel $\frac{\pi}{3}$ kolem přímky ℓ zadané implicitně homogenní soustavou lineárních rovnic

$$\ell: \; x_1 + x_2 = 0, \; x_2 + x_3 = 0.$$

Poněvadž není stanoveno, v jakém smyslu se řečená rotace kolem přímky ℓ děje, existují skutečně dvě ortogonální transformace σ, τ euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$ vyhovující uvedené charakterizaci. Najděte matice obou lineárních operátorů σ, τ ve standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Přesvědčte se, že tyto dva lineární operátory σ, τ splňují podmínku $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.