Domácí úkoly ke cvičení č. 4

1. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ všech polynomů jedné proměnné x stupně nejvýše 4 nad tělesem $\mathbb{R}$ je dána báze

$$\alpha = \big(1,\, x+1,\, (x+1)^2,\, (x+1)^3,\, (x+1)^4\big).$$

Najděte k ní duální bázi α^* v duálním vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]^*$ pozůstávajícím ze všech lineárních forem na $\mathbb{R}_4[x]$. Každou lineární formu duální báze α^* přitom zadejte předpisem, podle něhož je možno stanovit hodnotu této lineární formy na libovolném polynomu $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ z $\mathbb{R}_4[x]$.

2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]^*$ duálním k vektorovému prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ všech polynomů jedné proměnné x stupně nejvýše 4 nad tělesem $\mathbb{R}$, který pozůstává ze všech lineárních forem na $\mathbb{R}_4[x]$, je dána báze

$$\Gamma = \big(g_0,\, g_1,\, g_2,\, g_3,\, g_4\big),$$

kde lineární formy $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}$ jsou zadány následujícími předpisy. Pro každý polynom $p(x)$ z $\mathbb{R}_4[x]$ jsou hodnoty lineárních forem g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 na $p(x)$ dány takto:

$$g_0(p(x)) = p(1),\ g_1(p(x)) = p'(1),\ g_2(p(x)) = p''(1),$$
$$g_3(p(x)) = p'''(1),\ g_4(p(x)) = p''''(1).$$

Najděte polynomy $q_0(x), q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ z $\mathbb{R}_4[x]$ takové, aby

$$\beta = \big(q_0(x),\, q_1(x),\, q_2(x),\, q_3(x),\, q_4(x)\big)$$

byla báze vektorového prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ s vlastností, že daná báze Γ duálního vektorového prostoru $\mathbb{R}_4[x]^*$ je bází k ní duální, tedy taková, aby platilo $\Gamma = \beta^*$.

3. Nechť symetrická bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ má ve standardních souřadnicích prostoru $\mathbb{R}^4$ vyjádření tvaru

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_2 + 8x_1y_3 + 2x_2y_1 - 2x_2y_3 - 8x_2y_4 \\ + 8x_3y_1 - 2x_3y_2 + 8x_3y_4 - 8x_4y_2 + 8x_4y_3\,. \end{aligned}$$

Metodou stejných elementárních řádkových a sloupcových úprav matice bilineární formy f upravte tuto bilineární formu na diagonální tvar, v němž budou vystupovat pouze koeficienty $1, -1$, případně 0, a to v tomto uvedeném pořadí. Najděte alespoň dvě různé báze α, β prostoru $\mathbb{R}^4$ lišící se od sebe i tehdy, když se na ně hledí jen jako na množiny vektorů, tak aby v souřadnicích vzhledem k bázi α i vzhledem k bázi β měla daná bilineární forma f nalezený diagonální tvar.

4. Na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ všech polynomů jedné proměnné x stupně nejvýše 3 nad tělesem $\mathbb{R}$ je dána bilineární forma $g : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ následujícím předpisem. Pro kterékoliv dva polynomy $p(x)$, $q(x)$ z $\mathbb{R}_3[x]$ je hodnota bilineární formy g na polynomech $p(x)$, $q(x)$ dána formulí

$$\begin{aligned} g\big(p(x), q(x)\big) = p(1)\cdot q'''(1) + p'(1)\cdot q''(1) \\ + p''(1)\cdot q'(1) + p'''(1)\cdot q(1). \end{aligned}$$

Ověřte, že pak g je symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3[x]$. Najděte matici této symetrické bilineární formy g v souřadnicích vzhledem ke standardní bázi $\xi = (1, x, x^2, x^3)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}_3[x]$. Metodou stejných elementárních řádkových a sloupcových úprav matice symetrické bilineární formy g upravte tuto bilineární formu na diagonální tvar, v němž budou vystupovat pouze koeficienty $1, -1$, případně 0, a to v tomto uvedeném pořadí. Najděte příklad báze γ vektorového prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ takové, aby v souřadnicích vzhledem k bázi γ měla bilineární forma g nalezený diagonální tvar.