Výsledky domácích úkolů ke cvičení č. 11

1. Matice ortogonální transformace ψ euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$ v jeho standardní bázi:

$$\frac{1}{49}\cdot\begin{pmatrix}-41 & 12 & 24\\ 12 & -31 & 36\\ 24 & 36 & 23\end{pmatrix}.$$

Ortogonální transformace ψ je současně také samoadjungovaným operátorem na euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$.

2. Matice lineárního operátoru $\wp_\varrho$ ve standardní bázi euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$:

$$\frac{1}{50}\cdot\begin{pmatrix}41 & -12 & -15\\ -12 & 34 & -20\\ -15 & -20 & 25\end{pmatrix}.$$

Lineární operátor $\wp_\varrho$ je samoadjungovaným operátorem na euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$.

3. Například vzhledem k ortonormální bázi
$\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right)$
v souřadnicích
$(\mathbf{x})_\alpha = \left(\begin{smallmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{smallmatrix}\right)$
má kvadratická forma U diagonální kanonický tvar
$U(\mathbf{x}) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

Například vzhledem k ortonormální bázi
$\beta = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5), \frac{1}{3}(1,2,-2)\right)$
v souřadnicích
$(\mathbf{x})_\beta = \left(\begin{smallmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{smallmatrix}\right)$
má kvadratická forma V diagonální kanonický tvar
$V(\mathbf{x}) = z_1^2 + z_2^2 + 10z_3^2$.

Například vzhledem k ortonormální bázi
$\gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0), \frac{1}{3\sqrt{5}}(4,2,-5), \frac{1}{3}(2,1,2)\right)$
v souřadnicích
$(\mathbf{x})_\gamma = \left(\begin{smallmatrix}t_1\\ t_2\\ t_3\end{smallmatrix}\right)$
má kvadratická forma W diagonální kanonický tvar
$W(\mathbf{x}) = 7t_1^2 + 7t_2^2 - 2t_3^2$.

4. Například vzhledem k ortonormální bázi
$\delta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2,0), \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-1,1,3), \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\right)$
v souřadnicích
$(\mathbf{x})_\delta = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$
má kvadratická forma G diagonální kanonický tvar
$G(\mathbf{x}) = 3u_1^2 + 3u_2^2 + 3u_3^2 - u_4^2.$

Například vzhledem k ortonormální bázi
$\vartheta = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,0,-1), \frac{1}{\sqrt{30}}(2,1,5,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(1,-2,0,5)\right)$
v souřadnicích
$(\mathbf{x})_\vartheta = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$
má kvadratická forma H diagonální kanonický tvar
$H(\mathbf{x}) = 5v_1^2 + 5v_2^2 - v_3^2 - v_4^2.$