Seminář z matematiky II – jaro 2023 – 7. písemka

1. **(5 bodů)** Přímo z axiomatické definice skalárního součinu na reálném vektorovém prostoru V dokažte následující tvrzení:
   Pro libovolné vektory $u, v \in V$ platí $\langle u, v \rangle = 0$ právě tehdy, když
   $$\forall a \in \mathbb{R} \colon \|u\| \leq \|u + av\|.$$

2. **(5 bodů)** Přímo z axiomatické definice skalárního součinu na reálném vektorovém prostoru V dokažte následující tvrzení:
   Nechť $v \in V$ je vektor, U je podprostor prostoru V a $u_1, \ldots, u_m$ je konečná ortonormální báze podprostoru U. Jestliže pro všechny vektory $w \in V$ splňující $\forall u \in U \colon \langle u, w \rangle = 0$ platí i $\langle v, w \rangle = 0$, potom vektor v patří do podprostoru U.