

Seminář z matematiky II – jaro 2023 – 8. písemka

1. (5 bodů) Přímou z definice spojitosti a z vlastností suprem a infim na reálných číslech dokažte, že je-li funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá a platí $f(0) < f(1)$, potom existuje $a \in \langle 0, 1 \rangle$ takové, že pro všechna $b \in (a, 1)$ platí $f(a) < f(b)$. Ukažte, že bez předpokladu spojitosti tvrzení neplatí.
2. (5 bodů) Přímou z vlastností suprem a infim na reálných číslech dokažte pro funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, že pokud pro každé $a \in \langle 0, 1 \rangle$ existuje $\delta > 0$, pro něž je funkce f konstantní na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$, potom platí $f(0) = f(1)$. Ukažte, že se slabším předpokladem, že f je konstantní na intervalu $\langle a, a + \delta \rangle$, tvrzení neplatí.