

**MUNI**

M4010 Rovnice matematické fyziky

**Zdeněk Pospíšil**  
**707@mail.muni.cz**

Masarykova univerzita

21. února 2023

# Rovnice typu $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$

charakteristický systém

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= a(x, y) \\ \frac{dy}{ds} &= b(x, y)\end{aligned}$$

→ řešení  
systému ODR

charakteristiky

$$\begin{aligned}x &= x(s, C_1, C_2) \\ y &= y(s, C_1, C_2)\end{aligned}$$

↓ eliminace parametru  $s$

charakteristická rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

→ řešení ODR

první integrál

$$\varphi(x, y) = \text{const}$$

→

obecné řešení

$$u(x, y) = \Phi(\varphi(x, y))$$

## Rovnice typu $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = f(x, y, u)$

charakteristická rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \quad \xrightarrow{\text{řešení ODR}}$$

první integrál

$$\varphi(x, y) = \text{const}$$

transformace

$$\begin{array}{l} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = y \end{array} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = F(\xi, \eta, u) \quad \xrightarrow{\text{řešení ODR}} \quad V(\xi, \eta, u) = \Phi(\xi)$$

řešení v implicitním tvaru:  $V(\varphi(x, y), y, u) = \Phi(\varphi(x, y))$

## Okrajová úloha

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0, \quad u(X(\sigma), Y(\sigma)) = g(\sigma)$$

počáteční úloha pro  
charakteristický systém

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a(x, y) \\ \frac{dy}{ds} &= b(x, y) \end{aligned}$$

$$x(0) = X(\sigma), \quad y(0) = Y(\sigma)$$

řešení  
počáteční úlohy

parametrické  
vyjádření  
řešení úlohy

$$\begin{aligned} x &= x(s, \sigma) \\ y &= y(s, \sigma) \end{aligned}$$

$$u = g(\sigma)$$

eliminace  
parametru  $s$

$$\sigma = \sigma(x, y)$$

řešení úlohy

$$u(x, y) = g(\sigma(x, y))$$

# Okrajová úloha pro quasilineární rovnici

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \quad u(X(\sigma), Y(\sigma)) = g(\sigma)$$

počáteční úloha pro  
charakteristický systém

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a(x, y, u), & x(0) &= X(\sigma) \\ \frac{dy}{ds} &= b(x, y, u), & y(0) &= Y(\sigma) \\ \frac{du}{ds} &= c(x, y, u), & u(0) &= g(\sigma) \end{aligned} \right\}$$

řešení  
počáteční  
úlohy

parametrické  
vyjádření  
řešení úlohy

$$\left. \begin{aligned} x &= x(s, \sigma) \\ y &= y(s, \sigma) \\ u &= u(s, \sigma) \end{aligned} \right\}$$

vyjádření  
parametrů  $s, \sigma$

$$\begin{aligned} s &= s(x, y) \\ \sigma &= \sigma(x, y) \end{aligned}$$

řešení úlohy

$$u(x, y) = u(s(x, y), \sigma(x, y))$$

# Okrajová úloha pro obecnou rovnici

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad u(X(\sigma), Y(\sigma)) = g(\sigma)$$

$$\text{Označení } p = u_x, \quad q = u_y: F(x, y, u, p, q) = 0$$

počáteční úloha pro  
charakteristický systém

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= F_p(x, y, u, p, q), & x(0) &= X(\sigma) \\ \frac{dy}{ds} &= F_q(x, y, u, p, q), & y(0) &= Y(\sigma) \\ \frac{du}{ds} &= pF_p(x, y, u, p, q) + qF_q(x, y, u, p, q), & u(0) &= g(\sigma) \\ \frac{dp}{ds} &= -F_x(x, y, u, p, q) - pF_u(x, y, u, p, q), & p(0) &= p_0 \\ \frac{dq}{ds} &= -F_y(x, y, u, p, q) - qF_u(x, y, u, p, q), & q(0) &= q_0 \end{aligned}$$

charakteristický  
pruh

$$\left. \begin{aligned} x &= x(s, \sigma) \\ y &= y(s, \sigma) \\ u &= u(s, \sigma) \end{aligned} \right\} \text{parametrické} \\ \left. \begin{aligned} p &= p(s, \sigma) \\ q &= q(s, \sigma) \end{aligned} \right\} \text{vyjádření} \\ & \text{řešení úlohy}$$

řešení  
počáteční  
úlohy

$$\begin{aligned} \text{při tom: } F(X(\sigma), Y(\sigma), g(\sigma), p_0, q_0) &= 0 \\ p_0 X'(\sigma) + q_0 Y'(\sigma) &= g'(\sigma) \end{aligned}$$

**MASARYKOVA  
UNIVERZITA**