

Newtonova metoda

Příklady ze skript

Příklad 1.

Užitím Newtonovy metody vypočtete $\sqrt{13}$. Zvolte vhodnou funkci a počáteční aproximaci.

Příklad 2.

Newtonovou metodou nalezněte řešení rovnice $x = \cos x$.

Příklad 3.

Užitím Newtonovy metody s počáteční aproximací $x_0 = 10$ vypočtete $\sqrt{91}$.

Příklad 4.

Na parabole $y = x^2$ najděte užitím Newtonovy metody bod nejbližší bodu $(1, 3)$.

Návod:

1. Určete druhou mocninu vzdálenosti $d^2(x)$ bodu $X = (x, x^2)$ ležícího na parabole a bodu $(1, 3)$.
2. Řešte rovnici $(d^2(x))' = f(x) = 0$. Za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1, 0$.

Příklad 5.

Užijte Newtonovu metodu k nalezení kořenů funkcí

- $x^3 - 2x^2 - 5 = 0, \quad \xi \in [1, 4],$
- $x - 0,8 - 0,2 \sin x = 0, \quad \xi \in [0, \frac{\pi}{2}],$
- $3x^2 - e^x = 0, \quad \xi \in [0, 2].$

Příklad 6.

Je dána rovnice $\frac{4x-7}{x-2} = 0$. Je $x_0 = 3$ vhodná počáteční aproximace pro použití Newtonovy metody?

Příklad 7.

Je dána funkce $f(x) = \cos x$. Newtonovou metodou chceme najít kořen $\xi = \frac{3\pi}{2}$. Můžeme použít počáteční aproximaci $x^0 = 3$? Proč?

Můžeme použít počáteční aproximaci $x_0 = 5$? Proč?

Příklad 8.

Je dána funkce $f(x) = \sqrt{(x-3)}$. Můžeme užít Newtonovu metodu pro nalezení kořene s počáteční aproximací $x_0 = 4$? Proč?

Jaká je vhodná počáteční aproximace?

Další příklady

Příklad 1.

Je dána rovnice $3x^2 = e^x$. Pokuste se najít všechna řešení s pomocí Newtonovy metody.

Příklad 2.

Funkce $f(x) = x \sin x$ má kořen v 0 a $f'(0) = 0$. Ukažte, že Newtonova metoda přesto konverguje k 0 pro $x_0 = 1$.

Dokažte, že řád konvergence je roven 1.

Příklad 3.

Funkce $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ je klesající a konvexní (viz Fourierovy podmínky) na intervalu $[0, 5]$. Je $x_0 = 0$ vhodná počáteční iterace?

Příklad 4.

Funkce $f(x) = e^{x^2+x^3} - 2$ má jediný kladný kořen. Nalezněte interval, v němž kořen leží a na kterém jsou splněny Fourierovy podmínky pro konvergenci Newtonovy metody. Tyto podmínky ověřte. Pak zvolte vhodně počáteční iteraci (a spočítejte další tři iterace pomocí Newtonovy metody).

Příklad 5.

Uvažujme Newtonovu metodu pro funkci $f(x) = xe^{-\frac{1}{|x|}}$. Ukažte, že pro $x_0 = 1$ platí $x_n = \frac{1}{n+1}$.

Příklad 6.

Vyzkoušejte Newtonovu metodu na funkci $f(x) = \sqrt{|x|}$.

Úkoly v Matlabu

Příklad 1.

Dokončete program `newton_dodelat` a otestujte jej na různých příkladech.

Příklad 2.

Vyzkoušejte dokončený program `newton` na funkci $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ s počáteční iterací $x_0 = 0$ (viz příklad 3 v předchozí části). Vysvětlete chování programu.

Příklad 3.

S použitím programu RNR vyzkoušejte grafickou demonstraci Newtonovy metody na různých příkladech.