

Polynomiální interpolace

Příklady ze skript

Příklad 1.

Najděte Lagrangeův interpolační polynom, je-li dáno

x_i	0	1	2	5
f_i	2	3	12	147

Vyzkoušejte přímý výpočet Lagrangeových fundamentálních polynomů i výpočet s využitím funkce ω_{n+1} a Hornerova schematu. ($P_3(x) = x^3 + x^2 - x + 2$.)

Příklad 2.

S jakou přesností lze vypočítat $\sqrt{115}$ pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu pro funkci $y = \sqrt{x}$, když vybereme za uzly interpolace $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$? ($|E(115)| \leq 1,6 \cdot 10^{-3}$.)

Příklad 3.

Nechť l_i , $i = 0, 1, \dots, n$ jsou Lagrangeovy fundamentální polynomy pro uzly x_0, \dots, x_n . Dokažte:

1. Je-li $l_i(0) = c_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, pak

$$\sum_{i=0}^n c_i x_i^j = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = 0 \\ 0 & \text{pro } j = 1, 2, \dots, n \\ (-1)^n x_0 x_1 \dots x_n & \text{pro } j = n + 1 \end{cases}$$

(Návod: Využijte jednoznačnosti interpolačního polynomu. Pro poslední rovnost využijte první příklad z následující části.)

Příklad 4.

Najděte Newtonův interpolační polynom, je-li dáno

x_i	0	2	3	5
f_i	1	3	2	5

$$(P_3(x) = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1.)$$

Další příklady

Příklad 1.

Polynom $Q(x) = x^{n+1}$ můžeme pro uzly x_0, \dots, x_n vyjádřit jako $Q(x) = \omega_{n+1}(x) + P(x)$, kde stupeň polynomu P je nejvýše roven n . Ukažte, že P je interpolační polynom funkce Q na uzlech x_0, \dots, x_n .

Příklad 2.

Pro přibližný výpočet $\sin 1$ použijte interpolační polynom a uzly

- a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$
- b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$
- c) $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

Jaká je maximální chyba v jednotlivých případech?

Úkoly v Matlabu

Příklad 1.

Dokončete program LIP_dodelat a otestujte jej na předchozích příkladech.

Příklad 2.

Pro různé funkce na stejných uzlech využijte matici Lagrangeových fundamentálních polynomů, kterou jako druhý výstupní argument vrací program LIP.

Příklad 3.

Vyzkoušejte interpolaci v situacích, kdy nedává dobré výsledky (např. funkce $f(x) = |x|$, polynom vysokého stupně apod).

Příklad 4.

Bonusový úkol:

Pokuste se vytvořit v Matlabu program pro Newtonův interpolační polynom s použitím pouze jediného cyklu.