Systémy lineárních rovnic – iterační metody

Příklady ze skript

Některé jsou vhodné pro řešení na počítačích.

Příklad 1.
Je matice $H = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & -0,1 \\ 0,7 & -0,15 & 0,05 \\ 0,2 & 0,0 & 0,6 \end{pmatrix}$ konvergentní?

Příklad 2.
a) Jacobiovou, b) Gaussovou-Seidelovou iterační metodou řešte systémy

$$\begin{aligned} 10x_1 - \ 2x_2 - \ 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 10x_2 - \ 2x_3 &= 7 \\ -x_1 - \ x_2 + 10x_3 &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned} \ .$$

Příklad 3.
Ukažte, že pro systém

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 1 \\ 2(1-\varepsilon)x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 2 \\ x_3 + x_4 &= -1 \\ -(1-\varepsilon)^2 x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$(0 < \varepsilon < 0{,}1)$ Jacobiova metoda konverguje a Gaussova-Seidelova metoda diverguje.

Příklad 4.
Ukažte, že pro systém

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0{,}375 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

diverguje Jacobiova i Gaussova-Seidelova metoda.

Příklad 5.
Ukažte, že pro systém

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ -x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

Jacobiova iterační metoda konverguje. Zvolte počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 = (1,1,1)^T$ a vypočtěte $\boldsymbol{x}^1$ a $\boldsymbol{x}^2$.

Příklad 6.
Ukažte, že pro systém

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Jacobiova iterační metoda diverguje a Gaussova-Seidelova metoda konverguje.

Příklad 7.
Dokažte, že pro systém

$$\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0\\
x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5\\
2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 &= -10\\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 &= 15
\end{aligned}$$

Jacobiova iterační metoda konverguje. Kolik iterací je třeba k nalezení řešení s chybou menší než 10^{-4}?
(Řešení: $k \geq 17$.)

Příklad 8.
Ukažte, že pro systém

$$\begin{aligned}
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1\\
x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 2\\
2x_1 - x_2 - 7x_3 &= 4
\end{aligned}$$

Jacobiova metoda konverguje. Zvolte počáteční iteraci $\boldsymbol{x}^0 = (1,1,1)^T$ a vypočtěte $\boldsymbol{x}^1$ a $\boldsymbol{x}^2$.

Příklad 9.
Ukažte, že pro systém

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\
2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4\\
-x_1 - x_2 - 3x_3 &= -1
\end{aligned}$$

Gaussova-Seidelova metoda konverguje. Zvolte počáteční iteraci $x^0 = (0,0,0)^T$ a vypočtěte první dvě iterace.

Příklad 10.
Ukažte, že pro systém

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 - x_3 &= 3\\
-x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1\\
-3x_1 - x_2 + 4x_3 &= -1
\end{aligned}$$

Jacobiova iterační metoda diverguje.

Příklad 11.
Ukažte, že pro systém

$$\begin{aligned}
6x_1 + 3x_2 \phantom{{}-x_3} &= 10\\
3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 5\\
-x_2 + 4x_3 &= -6
\end{aligned}$$

Gaussova–Seidelova iterační metoda konverguje. Zvolte počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 = (1,1,1)^T$ a vypočtěte $\boldsymbol{x}^1$ a $\boldsymbol{x}^2$.

Příklad 12.
Systém

$$\begin{aligned}
4x_1 + 3x_2 \phantom{{}- x_3} &= 24\\
3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30\\
- x_2 + 4x_3 &= -24
\end{aligned}$$

má přesné řešení $\boldsymbol{x}^* = (3,4,-5)^T$. Užijte Gaussovy-Seidelovy iterační metody a relaxační metody s parametrem $\omega = 1{,}25$. Porovnejte výsledky po provedení 7 iterací. Vypočtěte optimální hodnotu parametru ω.
(Řešení: $\varrho(T_G) = 0{,}625$, $\varrho(T_{\omega_{opt}}) \approx 0{,}24$, $\omega_{opt} \approx 1{,}24$.)

Příklad 13.
Systém

$$\begin{aligned} 10x_1 - \quad x_2 \qquad\quad &= 9 \\ - x_1 + 10x_2 - \ 2x_3 &= 7 \\ - \ 2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

(přesné řešení $\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{473}{475}, \frac{455}{475}, \frac{376}{475}\right)^T$) řešte relaxační metodou s $\omega = 0{,}5$, $\omega = 1{,}1$ a vypočtěte optimální hodnotu parametru ω_{opt} a řešte systém relaxační metodou s tímto parametrem.

Příklad 14.
Může být v iteračním procesu $\boldsymbol{x}^{k+1} = T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{g}$ iterační matice T singulární?

Další příklady

Příklad 1.
Jacobiova metoda pro systém

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= \ \ 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= \ \ 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

obecně nekonverguje, neboť $\varrho(T_J) > 1$. Přesto pro počáteční aproximaci $x_0 = (0, 0, 0)^T$ iterační proces konverguje k řešení $(1, 0, -1)^T$. Proč?

Příklad 2.
Uvažujte systém

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Ukažte, že pro Jacobiovu metodu platí $T_J^4 = E$. Co to znamená pro iterační proces? Platí něco podobného pro Gaussovu-Seidelovu metodu?

Příklad 3.
Ukažte, že pro matici soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & -p \\ 1 & p \end{bmatrix}, \ p \neq 0$$

Jacobiova i Gaussova-Seidelova metoda cyklí pro libovolnou pravou stranu a počáteční iteraci.

Úkoly v Matlabu

Příklad 1.
Dokončete programy `jacobi_dodelat` a `gauss_seidel_dodelat` a otestujte je na předchozích příkladech.

Příklad 2.
Vyzkoušejte program `demo_itermat` na různých příkladech.

Příklad 3.
Podle 1. příkladu předchozí části Jacobiova metoda pro systém

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= \ \ 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= \ \ 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

konverguje pro počáteční aproximaci $x_0 = (0, 0, 0)^T$ iterační proces k řešení $(1, 0, -1)^T$. Zkuste v Matlabu spočítat 150 iterací. Vysvětlete chování iteračního procesu.