Systémy lineárních rovnic – přímé metody

Příklady ze skript

Příklad 1.
Řešte systém GEM a) bez výběru hlavního prvku, b) s částečným výběrem hlavního prvku:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}-3x_4} &= -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

(Řešení: $x_1 = -7$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$.)

Příklad 2.
Užijte Gaussovy eliminační metody s částečným výběrem hlavního prvku pro řešení soustavy

$$\begin{array}{rcl} x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 5 \end{array} .$$

Příklad 3.
Ukažte že matici A nelze rozložit na součin horní a dolní trojúhelníkové matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešte nyní systémy $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$, kde $\boldsymbol{b}_1 = (7, 8, 10, 0)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (7, 5, 10, 0)^T$. Užijte GEM a ukažte, že systém $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ má nekonečně mnoho řešení a systém $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ nemá žádné řešení.

Příklad 4.
Přesné řešení systému

$$\begin{aligned} 1{,}133x_1 + 5{,}281x_2 &= 6{,}414 \\ 24{,}14x_1 - 1{,}210x_2 &= 22{,}93 \end{aligned}$$

je $\boldsymbol{x} = (1, 1)^T$. Řešte tento systém se zaokrouhlováním na 4 cifry

1. GEM bez výběru hlavního prvku,
2. GEM s částečným výběrem hlavního prvku.

(1. $x_1 = 0{,}9956$, $x_2 = 1{,}001$; 2. $x_1 = 1{,}000$, $x_2 = 1{,}000$.)

Příklad 5.
Najděte LU rozklad $A = LU$ ($l_{ii} = 1$, $i = 1, 2, 3$)

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(Řešení: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & 0 \\ -0{,}6 & 5{,}5 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0{,}4 & 2{,}8 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$)

Příklad 6.
Nechť A je pozitivně definitní matice. Ukažte, že

1. $a_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

2. $\max\limits_{1 \le i \le n} a_{ii} = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

Příklad 7.
Je možné provést rozklad $A = LR$, respektive $PA = LR$ pro singulární matici A?

Příklad 8.
Je možné rozložit matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

na součin dolní a horní trojúhelníkové matice?

Další příklady

Příklad 1. (ukázka vlivu špatné podmíněnosti matice)
Řešení systému rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 15 \\ 7x_1 & + & 8x_2 & + & 9.001x_3 & = & 24.001 \end{array} .$$

je $[1, 1, 1]^T$. Určete řešení pro zaokrouhlenou pravou stranu $[6, 15, 24]^T$.

Úkoly v Matlabu

Příklad 1.
Pro matici

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9.001 \end{bmatrix}$$

z 1. příkladu předchozí části určete číslo podmíněnosti ($c_p = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, v Matlabu `cond(A)`).

Příklad 2.
Řešte systém $H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ s Hilbertovou maticí H:

1.
$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Dále řešte tento systém s maticí $\tilde{H} = H + \delta H$ (zaokrouhleno na 5 desetinnýc míst) a porovnejte výsledky
$$H + \delta H = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}5 & 0{,}33333 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}33333 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}16667 \\ 0{,}33333 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}16667 & 0{,}14286 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}16667 & 0{,}14286 & 0{,}125 \\ 0{,}2 & 0{,}16667 & 0{,}14286 & 0{,}125 & 0{,}11111 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{b} = [1, 0, 0, 0, 0]^T.$$

(1. Řešení s maticí H:
$\boldsymbol{x} = (25, -300, 1050, -1400, 630)^T$.
2. Řešení s maticí $\tilde{H}$:
$\tilde{\boldsymbol{x}} = (28{,}02304; -348{,}5887; 1239{,}781; -1666{,}785; 753{,}5564)^T$.)