Systémy nelineárních rovnic

Příklady ze skript

Příklad 1.
Uvažujme systém nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2x_1 - x_1^2 + x_2}{2} \quad \text{(parabola)}, \\ x_2 &= \frac{2x_1 - x_1^2 + 8}{9} + \frac{4x_2 - x_2^2}{4} \quad \text{(elipsa)}. \end{aligned}$$

Zvolte $\boldsymbol{x}^0 = (1{,}4; 2{,}0)^T$ a vypočtěte 2 iterace

1. iterační metodou $\boldsymbol{x}^k = G(\boldsymbol{x}^{k-1})$,
2. Seidelovou metodou.

Výsledky porovnejte s přesným řešením $\boldsymbol{\xi} \doteq (1{,}4076401; 1{,}9814506)^T$.

Příklad 2.
Je dána soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{7x_1^3 - x_2 - 1}{10} \equiv g_1(x_1, x_2) \\ x_2 &= \frac{8x_2^3 + x_1 - 1}{11} \equiv g_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Tato soustava má 9 pevných bodů.
Ověřte, že v okolí bodu (0,0) splňuje tato soustava podmínku pro konvergenci iteračního procesu

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= g_1(x_1^k, x_2^k) \\ x_2^{k+1} &= g_2(x_1^k, x_2^k) \end{aligned}.$$

Bude tato podmínka splněna v okolí bodu (1,1)?

Příklad 3.
Je dán systém nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2 - 0{,}2 &= 0, \\ x_2^2 - x_1 - 0{,}3 &= 0. \end{aligned}$$

Užitím Newtonovy metody nalezněte kořen ležící v 1. kvadrantu. Počáteční aproximaci určete graficky. ($\boldsymbol{x}^0 = (1{,}2; 1{,}2)^T$)

Další příklady

Příklad 1.
Střelec vystřelí projektil směrem na pohybující se terč, který je v okamžiku výstřelu 50 m daleko a 80 m vysoko a pohybuje se směrem od střelce ve vodorovném směru. Jeho počáteční rychlost je $v_1 = 2\,m/s$ a má zrychlení $a = 1\,m/s^2$. Projektil má počáteční rychlost $v_2 = 100\,m/s$, gravitační zrychlení je $g = 10\,m/s^2$, odpor vzduchu zanedbáme. Pod jakým úhlem θ musí střelec vystřelit směrem k terči, aby ho zasáhl? Použijte Newtonovu metodu pro nalezení obou řešení a určete také čas do zásahu pro jednotlivé případy.
Pohybové rovnice (s – vodorovná vzdálenost, h – výška)
terč: $s_1 = v_1 t + \frac{1}{2}at^2, \quad h_1 = 80$
projektil: $s_2 = v_2 t \cos\theta, \quad h_2 = v_2 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2.$
Zásah nastane pro $s_2 = s_1 + 50$, $h_2 = h_1$.

Příklad 2.
Použijte Newtonovu metodou na první dva příklady z předchozí části.

Příklad 3.
Problém zkřížených žebříků
Dva žebříky o délkách 2 a 3 metry jsou opřeny v uličce mezi dvěma zdmi a to tak, že každý z nich stojí u jedné zdi a opírá se o druhou. Žebříky se kříží ve výšce 1 metr. Jaká je šířka uličky?
Návod: Pokud označíme x šířku uličky, y a z výšky, ve kterých se žebříky opírají, získáme z podobnosti trojúhelníků a z Pythagorovy věty systém tři rovnic pro x, y a z, který můžeme vyřešit Newtonovou metodou.

Úkoly v Matlabu

Příklad 1.
S pomocí funkce `contour` zobrazte křivky v předchozích příkladech pro systémy dvou rovnic a na základě obrázků najděte vhodné počáteční iterace pro jednotlivá řešení.

Příklad 2.
Zjistěte, jak funguje funkce `jacobian` pro symbolické výpočty v Matlabu a s její pomocí dokončete program `newton_sys2_dodelat`. Pak jej otestujte jej na výše uvedených příkladech pro systémy dvou rovnic.