

Numerické derivování

Příklady ze skript

Příklad 1.

Pro ekvidistantní body a funkční hodnoty (x_{-1}, f_{-1}) , (x_0, f_0) , (x_1, f_1) odvoďte formule

$$f'(x_{-1}) \approx \frac{1}{2h}(-3f_{-1} + 4f_0 - f_1)$$
$$f'(x_1) \approx \frac{1}{2h}(f_{-1} - 4f_0 + 3f_1)$$

Příklad 2.

Odvoďte pětibodovou formuli pro ekvidistantní uzly ve tvaru

$$f'_0 \approx \frac{1}{12h}(f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2).$$

Příklad 3.

Užitím třibodových formulí vypočtete derivace funkce v daných bodech

x_i	-0,3	-0,1	0,1	0,3
f_i	-0,20431	-0,08993	0,11007	0,39569

Pro body -0,1 a 0,1 použijte centrální i necentrální formule.

$(f'(-0,3) \approx 0,35785, f'(-0,1) \approx 0,78595, f'(0,1) \approx 1,2141, f'(0,3) \approx 61,6422.)$

Příklad 4.

- Nechtě $f(x) = 2^x \sin x$. Aproximujte hodnotu $f'(1,05)$ užitím $h = 0,05$ a $h = 0,01$ a třibodové centrální formule jsou-li dány hodnoty:

x_i	1,0	1,04	1,06	1,10
$f(x_i)$	1,6829420	1,7732994	1,8188014	1,9103448

- Opakujte část a) pro případ, že všechny funkční hodnoty zaokrouhlíte na čtyři desetinná místa. (2,27403, 2,27510.)

Příklad 5.

Užitím třibodové centrální formule najděte první derivaci funkce $f(x) = 1/(1+x)$ v bodě $x = 0,005$.

Užijte a) $h = 1,0$, b) $h = 0,01$ a výsledky porovnejte s přesnou hodnotou. Vysvětlete!

Úkoly v Matlabu

Příklad 1. Odhad derivace funkce $y = x^3$.

- Na intervalu $[0, 3]$ vytvořte síť ekvidistantních uzlů postupně s krokem $h = 0,1$, $h = 0,05$ a $h = 0,01$, funkční hodnoty jsou hodnoty funkce $y = x^3$. Ve vnitřních uzlech vypočtete odhad derivace y' pomocí třibodové centrální formule. Výsledek pro každou hodnotu h porovnejte s přesnou derivací.
- K funkčním hodnotám přidejte normální šum ($y=x.^3+0.1*\text{randn}(\text{size}(x));$), určete odhad derivace ze zašuměných dat pro každé h a výsledek porovnejte s přesnou derivací.
- Zašuměná data vyhladte (např. pomocí funkce `polyfit`) a udělejte odhady derivace pro vyhlazená data.

Příklad 2.

Dokončete program `EEM_dodelat` pro numerické řešení počátečního problému explicitní Eulerovou metodou a otestujte jej na vhodných příkladech.