Numerické integrování

Příklady ze skript

Příklad 1.
Určete koeficienty A_0, A_1, A_2 tak, aby přesnost kvadraturní formule

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f\left(-\tfrac{1}{2}\right) + A_1 f(0) + A_2 f\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

byla alespoň 2.
($A_0 = \frac{4}{3}$, $A_1 = -\frac{2}{3}$, $A_2 = \frac{4}{3}$.)

Příklad 2.
Určete koeficienty A_0, A_1 a uzel x_0 pro formuli

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(1).$$

($A_0 = \frac{7}{15}$, $A_1 = \frac{1}{5}$, $x_0 = \frac{3}{7}$.)

Příklad 3.
Určete algebraicky neznámé uzly x_0, x_1 a koeficienty A_0, A_1 pro formuli

$$\int_{0}^{\pi} \sin x f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

tak, aby bylo dosaženo maximálního stupně přesnosti.
($A_0 = A_1 = 1$, $x_{0,1} = \dfrac{\pi}{2} \pm \sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - 2}$.)

Příklad 4.
Odvoďte Newtonovu-Cotesovu formuli otevřeného typu pro interval $[-2, 3]$ s krokem $h = 1$.
($\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx \approx \tfrac{5}{24}(11f(-1) + f(0) + f(1) + 11f(2))$)

Příklad 5.
Odvoďte Newtonovu-Cotesovu formuli uzavřeného typu pro interval $[a, b]$ a $n = 3$ (tzv. pravidlo 3/8).
$\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f(b)\right)$

Příklad 6.
Aproximujte integrál

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a) obdélníkovým, b) lichoběžníkovým, c) Simpsonovým pravidlem.
(a) 0,30055887, b) 0,27768018, c) 0,29293264.)

Příklad 7.
Následující integrály vypočtěte a) lichoběžníkovým, b) Simpsonovým pravidlem. Výsledky porovnejte s přesnými hodnotami

$$1.\ \int_{1}^{2} \ln x\,dx, \quad 2.\ \int_{0}^{0{,}1} x^{\frac{1}{3}}\,dx, \quad 3.\ \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^2\,dx.$$

(a) 1. 0,34657, 2. 0,023208, 3. 0,39270,
b) 1. 0,38583, 2. 0,032296, 3. 0,30543.)

Příklad 8.
Užijte a) složeného lichoběžníkového, b) složeného Simpsonova pravidla pro výpočet integrálů:

1. $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{1+x^2}\,dx, \quad M = 6,$
2. $\displaystyle\int_0^1 \sin \pi x\,dx, \quad M = 6,$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \sin x\,dx, \quad M = 8,$
4. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\,dx, \quad M = 8.$

Porovnejte získané aproximace s přesnými hodnotami.
(a) 1. 10,3122, 2. 0,62201, 3. $-5{,}9568$, 4. 0,72889,
b) 1. 10,20751, 2. 0,6366357, 3. $-6{,}284027$, 4. 0,7182830.)

Úkoly v Matlabu

Příklad 1.
Dokončete program `SLP_dodelat` pro numerické integrování pomocí složeného lichoběžníkového pravidla a otestujte jej na vhodných příkladech.

Příklad 2.
Dokončete program `SSP_dodelat` pro numerické integrování pomocí složeného Simpsonova pravidla a otestujte jej na vhodných příkladech.

Příklad 3.
Použijte program SLP na přibližný výpočet $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ pro různý počet subintervalů. Měla by vždy vyjít přesná hodnota $\frac{\pi}{4}$. Vysvětlete.

Příklad 4.
Použijte na přibližný výpočet $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ složené obdélníkové pravidlo pro různý počet subintervalů. Bude opět vycházet přesná hodnota $\frac{\pi}{4}$?