Prostá iterační metoda (metoda pevného bodu)

Příklady ze skript

Příklad 1.
Funkce $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ má jediný kořen v intervalu $[1; 1{,}5]$. Uvažujte tyto iterační funkce pro nalezení kořene ($\xi \approx 1{,}365230013$):

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= x - x^3 - 4x^2 + 10 & \qquad g_4(x) &= \left(\frac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}} \\
g_2(x) &= \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}} & \qquad g_5(x) &= x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} \\
g_3(x) &= \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}} & &
\end{aligned}
$$

Nechť počáteční aproximace $x_0 = 1{,}5$. Ukažte, že funkce g_3, g_4, g_5 jsou vhodné iterační funkce (tj. posloupnost iterací konverguje ke kořenu ξ). Dále ukažte, že volba funkce g_1 vede na divergentní posloupnost a posloupnost $\{x_k\}$, $x_k = g_2(x_{k-1})$, $x_0 = 1{,}5$, není definována (v oboru reálných čísel).

Příklad 2.
Ukažte, že funkce $g(x) = 2^{-x}$ má jediný pevný bod v intervalu $[\frac{1}{3}; 1]$. Najděte tento pevný bod s chybou menší než 10^{-4}. Kolik iterací je třeba k dosažení této přesnosti?
(Řešení: Pro $x_0 = 1$ je třeba 15 iterací.)

Příklad 3.
Je dána rovnice $3x^2 - e^x = 0$. Určete interval, ve kterém leží záporný kořen této rovnice. Najděte vhodnou iterační funkci g, pro kterou iterační metoda $x_{k+1} = g(x_k)$ bude konvergovat k tomuto kořenu.
Doplňující otázka: Kolik je kladných kořenů a jaké budou vhodné iterační funkce pro konvergenci k nim?

Příklad 4.
Je dána rovnice $3x^3 - x - 1 = 0$. Určete interval, ve kterém leží kladný kořen této rovnice. Najděte vhodnou iterační funkci g, pro kterou iterační metoda $x_{k+1} = g(x_k)$ bude konvergovat k tomuto kladnému kořenu.

Příklad 5.
Je dána iterační funkce $g(x) = (6 + x)^{1/2}$. Pevný bod je $\xi = 3$. Znázorněte geometricky příslušný iterační proces $x_{k+1} = g(x_k)$, $x_0 = 7$. Bude tento iterační proces konvergovat?

Příklad 6.
Ukažte, že iterační funkce

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

splňuje podmínky pro výpočet $\sqrt{2}$. Jaký tvar má funkce g pro výpočet $\sqrt{a}$, $a > 0$?

Příklad 7.
Je možné použít prostou iterační metodu v případě, že funkce g zobrazuje interval $I = [a, b]$ do sebe a platí $|g'(x)| \leq 1$, přičemž rovnost nastává pouze v některém z krajních bodů intervalu I? Proč?

Další příklady

Příklad 1.
Je dána iterační funkce $g(x) = \frac{1}{6}(7 - x^3) - \frac{1}{2}(x - x^2)$.

(i) Ukažte, že $x = 1$ je pevný bod funkce g.

(ii) Ukažte, že funkce g je kontrakce na intervalu $[0, 2]$.

(iii) Určete řád konvergence metody pevného bodu dané vztahem $x_{k+1} = g(x_k)$ na intervalu $[0, 2]$.

Příklad 2.
Ukažte, že iterační funkce

$$g(x) = \frac{A}{2(x+1) - A}, \quad A > 0$$

má jediný kladný pevný bod $\xi = \frac{A}{2}$. Určete, pro jaké hodnoty parametru A je funkce g kotrakce.

Úkoly v Matlabu

Příklad 1.
Vyzkoušejte programy `fix_p` a `demo_fix_p` na různých iteračních funkcích ($\cos x$, 2^{-x}, ...).

Příklad 2.
Pro iterační funkci $g(x) = 3x(1 - x)$ a počáteční iteraci 0.5 zjistěte s použitím programu `fix_p`, kolik iterací je potřeba pro dosažení přesnosti 0.001.

Příklad 3.
Použijte iterační funkci $g(x) = x - \frac{x^2 - 11}{K}$ pro numerické hledání $\sqrt{11}$. Iterační proces demonstrujte pomocí programu `demo_fix_p` pro různé hodnoty konstanty K. Pokuste se určit takovou hodnotu, pro niž je konvergence nejrychlejší.

Příklad 4.
S použitím programu RNR vyzkoušejte grafickou demonstraci prosté iterační metody na různých příkladech.