x presná hodnota $\qquad |x-\tilde{x}|$ absolútna chyba

$\tilde{x}$ aproximácia x $\qquad \dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|}$ relatívna chyba

riešime úlohu $y = U(x)$ $\qquad \Delta y = \tilde{y} - y$

$\Delta x = \tilde{x} - x$

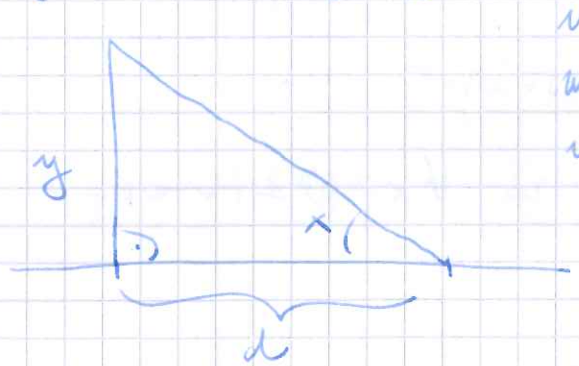
podmienenosť úlohy C_p je

$$C_p = \frac{\left|\frac{\Delta y}{y}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{x}\right|}$$

$C_p \approx 1$ úloha je dobre podmienená

$C_p > 100$ úloha je zle podmienená

výpočet výšky objektu



vysvetlite, prečo je najvhodnejšie merať uhol x s čo najväčšej vzdialenosti d od objektu

$$\tan x = \frac{y}{d}$$

$$\Rightarrow y = d \cdot \tan x$$

$y + \Delta y$ je riešenie pre $x + \Delta x$

$$y(x+\Delta x) = d \cdot \tan(x+\Delta x)$$

$$\Rightarrow \Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$$

$$C_p = \frac{\left|\frac{\Delta y}{y}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{x}\right|} = \frac{\left|\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{y(x)}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{x}\right|} = \frac{\left|\frac{\tan(x+\Delta x) - \tan(x)}{\tan x}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{x}\right|}$$

$$= \left|\frac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x}\right| \left|\frac{x}{\tan x}\right| \quad \underset{\Delta x \to 0}{\lim}$$

$$\left|\tan'(x)\right| \cdot \left|\frac{x}{\tan x}\right| = \left|\frac{x}{\cos x \sin x}\right|$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x \cdot \cos x} = 1 \qquad x = \frac{\pi}{4},\ \Delta x = 0{,}01 \rightsquigarrow C_p \approx 1{,}58$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\sin x \cos x} = \infty \qquad x = \frac{4\pi}{9},\ \Delta x = 0{,}01 \rightsquigarrow C_p \approx 8{,}65$$

O- notácia: ψ kladná funkcia v nejakom prstencovom okolí bodu a
φ je def. v nejakom prstencovom okolí bodu a

$\varphi \in O(\psi)$ pre $x \to a$, $a \in \mathbb{R}$

1) $\limsup_{x\to a} \frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} = \lim_{\delta\to 0^+} \left(\sup_{0<|x-a|<\delta} \frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} \right) < \infty$

2) $\exists\, M, \delta \in \mathbb{R}$, $M, \delta > 0$ také, že $\forall x$, $0<|x-a|<\delta$ platí $|\varphi(x)| < M\psi(x)$

1) $\Rightarrow$ 2) $\lim_{\delta\to 0^+} \left(\sup_{0<|x-a|<\delta} \frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} \right) = K \in \mathbb{R}_0^+$

ZVOLME $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta_0 > 0$, $\forall \delta \in (0, \delta_0)$

$$\sup_{0<|x-a|<\delta} \frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} < K + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x,\ 0<|x-a|<\delta_0 \quad \frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} < K + \varepsilon$$

$$|\varphi(x)| < \underbrace{(K+\varepsilon)}_{M} \cdot \psi(x)$$

2) $\Rightarrow$ 1) $\forall x$, $0<|x-a|<\delta$ $\quad |\varphi(x)| < M\varphi(x)$

$$\frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} < M$$

$$\sup_{0<|x-a|<\delta} \frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} \le M$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta\to 0^+} \left(\sup_{0<|x-a|<\delta} \frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} \right) \le M < \infty$$

$$O(g) + O(g) \cancel{=} \subseteq O(g)$$

$$f, h \in O(g) \Rightarrow f + h \in O(g)$$

$f \in O(g) \Rightarrow \exists\, M_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ $\forall x$, $0<|x-a|<\delta_1$; $|f(x)| < M_1 \psi(x)$
$h \in O(g) \Rightarrow \exists\, M_2, \delta_2 \in \mathbb{R}$ $\forall x$, $0<|x-a|<\delta_2$; $|h(x)| < M_2 \psi(x)$
zvolme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ $\quad M = M_1 + M_2$
$\forall x$, $0<|x-a|<\delta$

$$|f(x) + h(x)| \le |f(x)| + |h(x)| \le M_1 \psi(x) + M_2 \psi(x) = (M_1 + M_2)\psi(x) = M\psi(x)$$

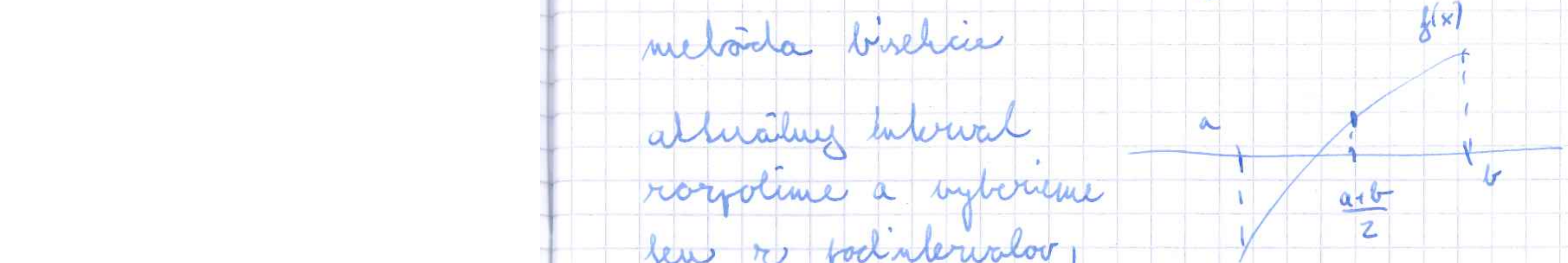
$\Rightarrow f + h \in O(g)$

$$O(g) + O(g) \subseteq O(g)$$

$f(x) = 0$, kde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f všeobecná (nelineárna) funkcia

metóda bisekcie



$f(a)\cdot f(b) < 0$

$f \in C[a,b]$

aktuálny interval rozpolíme a vyberieme ten z podintervalov, v ktorého krajných bodoch funkcia f ~~ma~~ nadobúda opačné znamienka

$[a_n, b_n]$, $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$, $s_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

ak $f(a_n) f(s_n) < 0 \rightsquigarrow [a_n, s_n]$

ak $f(s_n) f(b_n) < 0 \rightsquigarrow [s_n, b_n]$

ak s_n považujeme za n-tú aproximáciu potom je chyba metódy ~~#~~ ohraničená zhora hodnotou:

$$|s_n - \xi| \le \cancel{a_n} \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

ξ s vlastnosťou $f(\xi) = 0$ voláme koreň rovnice $f = 0$ (funkcie f).

príklad. Metódou bisekcie približne spočítajte hodnotu $\sqrt{2}$. Koľko iterácií potrebujeme, aby sme dosiahli presnosť aspoň 10^{-3}?

$f(x) = x^2 - 2$ má na intervale $I = [1,2]$ jediný koreň $\xi = \sqrt{2}$

$f \in C([1,2])$, $f(1) = -1$, $f(2) = 2 \Rightarrow f(1)\cdot f(2) < 0$

$$|s_n - \xi| \le \frac{2-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \le 10^{-3} \rightsquigarrow n \ge 9$$

po deviatich krokoch chyba určite neprevýši 10^{-3}

$\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512} > 10^{-3}$

$\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}$

Vlastný výpočet:

n	a	b	s	f(a)	f(b)	f(s)
0	1	2	$\frac{3}{2}$	−	+	+
1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	−	+	−
2	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{8}$	−	+	−

$s_2 = \frac{11}{8} \approx 1{,}37$ $\qquad \sqrt{2} \approx 1{,}4142\ldots$

prostá iteračná metóda:

úlohu $f(x)=0$ prevedieme na ekvivalentnú úlohu $x=g(x)$
(vyjadríme x z rovnice $f(x)=0$)

$f(\xi)=0 \Leftrightarrow g(\xi)=\xi$ (teda ξ je pevný bod funkcie g)

nech g spĺňa na intervale $I=[a,b]$:

1) $g \in C([a,b])$
2) $g([a,b]) \subseteq [a,b]$
3) $\exists\, 0 \le L < 1$; $\forall x,y \in [a,b]$ platí $|g(x)-g(y)| \le L|x-y|$

$\Rightarrow$ (Banachova veta o pevnom bode)

$\exists!\, \xi \in [a,b]$ taký, že $g(\xi)=\xi$ pričom $\forall x_0 \in [a,b]$ platí, že $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $x_{n+1}=g(x_n)$, spĺňa $x_n \to x_0$

vzhľadom k tomu, že $f(\xi)=0 \Leftrightarrow g(\xi)=\xi$, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje ku koreňu $\xi \in [a,b]$ funkcie f.

postačujúca podmienka pre splnenie 3): $\max\limits_{x\in[a,b]} |g'(x)| \le L < 1$

g nazveme iteračnou funkciou

príklad: Prostou iteračnou metódou približne vypočítajte hodnotu zlatého rezu.

Zlatý rez je kladný koreň funkcie $f(x)=x^2-x-1$

$f(1)=-1$, $f(2)=1 \Rightarrow f$ má v $I=[1,2]$ koreň

z rovnice $x^2-x-1=0$ vyjadríme x:

1) $x = x^2-1 = g_1(x)$ $\qquad g_1(1)=0 \notin [1,2]$, nie je splnená druhá podmienka

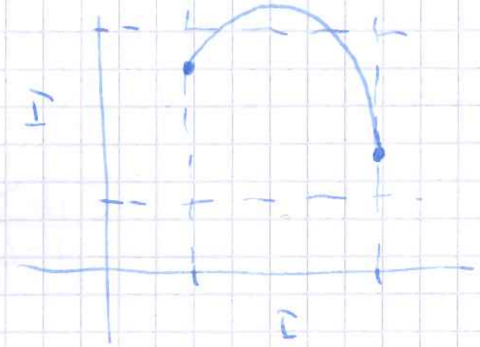
2) $x^2-x=1 \Leftrightarrow x(x-1)=1$ $\qquad x=\frac{1}{x-1}=g_2(x)$

g_2 nie je def. na celom I, nie je na I spojitá

3) $x^2 = 1+x \quad | :x$ (uvažujeme x len z I)

$x = \frac{1+x}{x} = 1+\frac{1}{x} = g(x)$

$g(1)=2$, $g(2)=\frac{3}{2}$ $\Rightarrow g(1), g(2) \in I$, ale ešte nevieme, či $g([1,2]) \subseteq [1,2]$

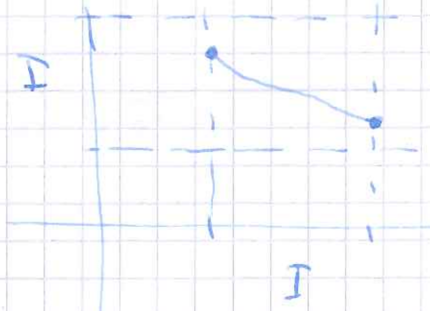


ak je monotónna (klesajúca)
$\Rightarrow g([1,2]) \subseteq [1,2]$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ na $[1,2]$

$\Rightarrow g$ klesá na I

$\Rightarrow g(I) \subseteq I$

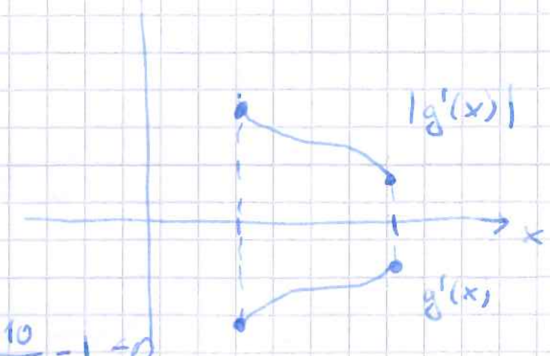


g je zrejme spojitá na I

$g''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ na I

$\Rightarrow g'$ rastie na I

$\Rightarrow \max\limits_{x\in I} |g'(x)| = |g'(1)| = 1$



skúsime zúžiť interval I

$I' = \left[\frac{11}{10}, 2\right]$ $\qquad f\left(\frac{11}{10}\right) = \frac{121}{100} - \frac{110}{100} - 1 < 0$

$\Rightarrow f$ má v I' koreň

g je spojitá na I'

$g\left(\frac{11}{10}\right) = 1+\frac{10}{11}$ $\qquad \frac{11}{10} < 1+\frac{10}{11} < 2$ $\Rightarrow g\left(\frac{11}{10}\right) \in \left[\frac{11}{10}, 2\right]$

$g(2) = \frac{3}{2} \in \left[\frac{11}{10}, 2\right]$

g klesá na I $\Rightarrow$ g klesá na I' $\Rightarrow$ $g(I') \subset I'$

$$\max_{x\in I'} |g'(x)| = \left|g'\left(\tfrac{11}{10}\right)\right| = \frac{1}{\left(\frac{11}{10}\right)^2} = \frac{100}{121} < 1$$

$\Rightarrow$ g je na intervale I' vhodnou iteračnou funkciou

$x_0 = 2$

$x_1 = g(x_0) = g(2) = \frac{3}{2}$

$x_2 = g(x_1) = g(\frac{3}{2}) = \frac{5}{3}$

$x_3 = g(x_2) = g(\frac{5}{3}) = \frac{8}{5}$

$x_4 = g(x_3) = g(\frac{8}{5}) = \frac{13}{8}$

$x_5 = g(x_4) = g(\frac{13}{8}) = \frac{21}{13}$

$21 : 13 = 1{,}6153$
80
20
70
50

odhad chyby:

$$|x_n - \xi| \le \frac{L^n}{1-L}|x_0 - x_1|$$

$L = \frac{100}{121}$

$$\frac{L^n}{1-L}|x_0-x_1| = \frac{\left(\frac{100}{121}\right)^n}{1-\frac{100}{121}}\left|2-\frac{3}{2}\right| = \frac{\left(\frac{100}{121}\right)^n \cdot \frac{1}{2}}{\frac{21}{121}}$$

$$\frac{121}{42}\cdot\left(\frac{100}{121}\right)^n \le 10^{-3}$$

$$\left(\frac{100}{121}\right)^n \le \frac{42}{121}\cdot 10^{-3}$$

$$n \log\left(\frac{100}{121}\right) \le \log\left(\frac{42}{121}\cdot 10^{-3}\right)$$

$$n \ge \frac{\log\left(\frac{42}{121}\cdot 10^{-3}\right)}{\log\left(\frac{100}{121}\right)} \simeq 41{,}78022$$

$n \ge 42$

príklad: Prostou iteračnou metódou odhadnite kladný koreň funkcie $f(x) = x^4 + x^2 - x - 3$

$f(0) = -3$, $f(2) = 15$ $\Rightarrow$ zvolíme $I = [0,2]$

$f(0)\cdot f(2) < 0$, $f \in C(I)$ $\Rightarrow$ f má v I koreň

$x^4 + x^2 - x - 3 = 0$

1) $x = x^4 + x^2 - 3 = g_1(x)$ $g_1(0) = -3 \notin [0,2]$

2) $x^2 - x = 3 - x^4$

$x = \frac{3-x^4}{x-1} = g_2(x)$ nie je definovaná (spojitá) na $I = [0,2]$

3) $x^4 + x^2 = 3 + x$

$x^2(x^2+1) = 3 + x$ $(x^2+1 > 0)$

$x^2 = \frac{3+x}{x^2+1}$ (>0)

$x = \sqrt{\frac{3+x}{x^2+1}} = g_3(x)$

dá sa ukázať, či spĺňa všetky podmienky, ale je to sprevádzané zložitejšími výpočtami

4) $x^4 = -x^2 + x + 3$ (>0 na I)

$D = 1 + 12 = 13$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{-2}$ $x_{1,2} \notin [0,2]$

$x = \sqrt[4]{-x^2+x+3} = g(x)$

$g(0) = \sqrt[4]{3} \in [0,2]$ $g(2) = 1 \in [0,2]$

$$g'(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{-2x+1}{\underbrace{(-x^2+x+3)^{\frac{3}{4}}}_{>0 \text{ na } I}}$$

$g'(\frac{1}{2}) = 0$

$\cancel{g'(x) > 0}$

$g'(x) > 0$ pre $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$g'(x) < 0$ pre $x \in [\frac{1}{2}, 2]$

g nie je monotónna na I

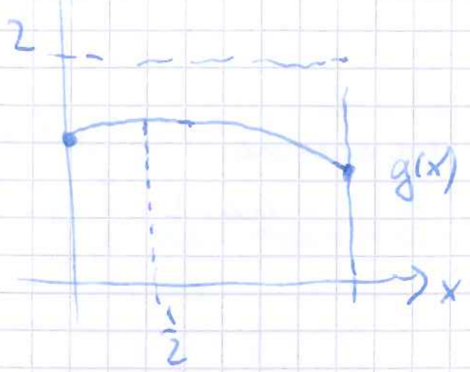
na to, aby sme ukázali $g(I) \subseteq I$ stačí, aby extrémy funkcie g boli v I

extrémy môžu nastať v krajných bodoch intervalu alebo v ~~bodoch~~ stacionárnych bodoch.

$g(\frac{1}{2}) = \sqrt[4]{3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3 + \frac{1}{4}} \in [0,2]$

g na $[0, \frac{1}{2}]$ rastie $\Rightarrow$ $g([0,\frac{1}{2}]) \subseteq [0,2]$

g na $[\frac{1}{2}, 2]$ klesá $\Rightarrow$ $g([\frac{1}{2},2]) \subseteq [0,2]$ $\Rightarrow g([0,2]) \subseteq [0,2]$



g je spojitá na I

3) $\max_{x \in I} |g'(x)| \le L < 1$?

$$g''(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{-2(-x^2+x+3)^{\frac{3}{4}} - (1-2x)\frac{3}{4} \cdot \frac{-2x+1}{(-x^2+x+3)^{\frac{1}{4}}}}{(-x^2+x+3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{4} \cdot \frac{-2(-x^2+x+3) - \frac{3}{4}(1-2x)^2 \cdot \frac{1}{(-x^2+x+3)^{\frac{3}{2}}}}{(-x^2+x+3)^{\frac{7}{4}}}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{-2(-x^2+x+3)^{\frac{10}{4}} - \frac{3}{4}(1-2x)^2}{(-x^2+x+3)^{\frac{7}{4}}}}{(-x^2+x+3)^{\frac{6}{4}}}} =$$

$$\cancel{= \frac{1}{4} \cdot \frac{-2(-x^2+x+3)^{\frac{10}{4}} - \frac{3}{4}(1-2x)^2}{(-x^2+x+3)^{\frac{13}{4}}}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{-2(-x^2+x+3) - \frac{3}{4}(1-2x)^2}{(-x^2+x+3)^{\frac{7}{4}}} =$$

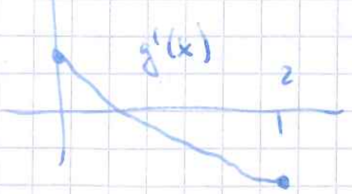
$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{-8(-x^2+x+3) - 3(1-4x+4x^2)}{(-x^2+x+3)^{\frac{7}{4}}}$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{-4x^2+4x-27}{\underbrace{(-x^2+x+3)^{\frac{7}{4}}}_{\text{kladné na } [0,2]}}$$

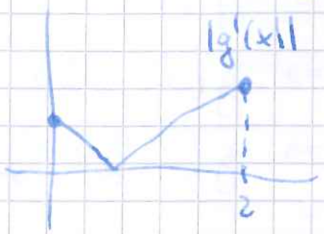
$D = 16 - 4 \cdot 16 \cdot 27 < 0$

čitateľ nemá korene a je záporný

$\Rightarrow g''(x) < 0 \quad \forall x \in [0,2] \Rightarrow g'(x)$ ~~rastie~~ klesá na I



$\Rightarrow$



$\Rightarrow \max_{x \in [0,2]} |g'(x)|$ je

nadobudnuté v jednom z krajných bodov

$g'(0) = \frac{1}{4 \cdot (3)^{\frac{3}{4}}} < 1$

$|g'(2)| = \frac{3}{4} < 1$ $\Rightarrow \max_{x \in [0,2]} |g'(x)| = \frac{3}{4} < 1$

$\Rightarrow$ g je vhodná iteračná funkcia na I.

$x_0 = 2$

$x_1 = g(x_0) = g(2) = 1$

$x_2 = g(x_1) = g(1) = \sqrt[4]{3}$ ....

„všeobecný" postup pri hľadaní iteračnej funkcie

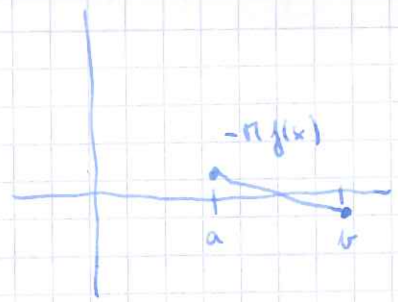
riešime rovnicu $f(x)=0$, kde $f \in C^1[a,b]$ $f(a)\cdot f(b) < 0$

f' nemení znamienko na int. $[a,b]$

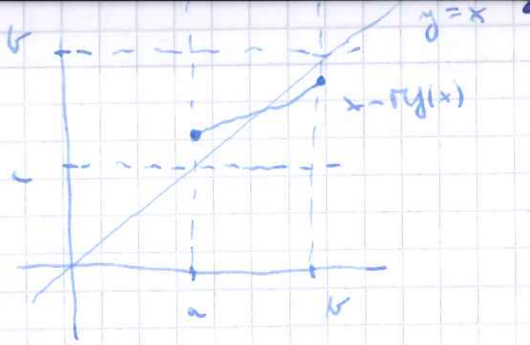
(stále $f'>0$ alebo $f'<0$: $(\forall x \in [a,b])(f'(x)>0) \vee$
$\vee (\forall x \in [a,b])(f'(x)<0)$)

pre určitosť povedzme $f'>0$ ($\Rightarrow f(a)<0,\ f(b)>0$)
f rastie

$f(x)=0$



$-\Pi\cdot f(x)=0$



$\underbrace{x-\Pi f(x)}_{g(x)} = x$

ak $K=\frac{1}{\Pi}$ zvolíme dostatočne veľké, potom g je monotónna a na intervale $[a,b]$ splňa všetky podmienky kladené na vhodnú iteračnú funkciu

$$K > \max\left\{ \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|,\ \frac{f(a)}{a-b},\ \frac{f(b)}{b-a} \right\}$$

príklad z minulej hodiny: $f(x) = x^4 + x^2 - x - 3$

$f(1) = -2,\ f(2) = 15 \Rightarrow \xi \in [1,2]$

$f'(x) = 4x^3 + 2x - 1 \Rightarrow f'$ je rastúca funkcia

$f'(1) = 5 \Rightarrow f'(x) > 0\quad \forall x \in [1,2]$

$f''(x) = 12x^2 + 2 > 0\quad \forall x \in \mathbb{R}$

($\Rightarrow f'$ nemá stacionárny bod $\rightarrow$ extrém nastáva v krajnom bode intervalu)

f' rastie a je kladná $\rightarrow \max_{x\in[1,2]} |f'(x)| = f'(2) = 35$

$$\frac{f(a)}{a-b} = \frac{f(1)}{-1} = 2 \qquad \frac{f(b)}{b-a} = \frac{f(2)}{1} = 15$$

K zvolíme napríklad $K=40$

$g(x) = x - \frac{f(x)}{40}$ je vhodná iteračná funkcia na intervale $[1,2]$

nech $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je taká, že $x_n \rightarrow \xi$