numerické derivovanie

$x_0, \dots, x_n$ uzly, $x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$

$f_0, \dots, f_n$ funkčné hodnoty $f_i = f(x_i)$

$P(x)$ interpolačný polynóm : $\quad f'(x) \approx P'(x)$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i'(x)$$

trojbodové formule:

$$P'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) \qquad \boxed{h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0}$$

$$P'(x_1) = \frac{1}{2h}(f_2 - f_0)$$

$$P'(x_2) = \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2)$$

druhá derivácia:

$$P''(x_1) = \frac{1}{h^2}(f_0 - 2f_1 + f_2)$$

príklad: Nech $f(x) = 2^x \sin x$. Aproximujte hodnotu $f'(1{,}05)$ použitím $h = 0{,}05$ a $h = 0{,}01$ a trojbodovej centrálnej formule, ak sú dané hodnoty:

x_i	1,0	1,04	1,06	1,10
$f(x_i)$	1,6829420	1,7732994	1,8188014	1,9103448

1) $h = 0{,}05 \Rightarrow x_0 = 1,\ x_1 = 1{,}05,\ x_2 = 1{,}1$

$$f'(1{,}05) \approx \frac{1}{0{,}1}(1{,}9103448 - 1{,}6829420) = 2{,}274028$$

2) $h = 0{,}01 \Rightarrow x_0 = 1{,}04,\ x_1 = 1{,}05,\ x_2 = 1{,}06$

$$f'(1{,}05) \approx \frac{1}{0{,}02}(1{,}8188014 - 1{,}7732994) = 2{,}2751$$

To isté, ale funkčné hodnoty zaokrúhlime na ~~4~~ 3 d.m.

1*) $h = 0{,}05$

$$f'(1{,}05) \approx \frac{1}{0{,}1}(1{,}910 - 1{,}683) = 2{,}27$$

2^*, $h = 0{,}01$

$$f'(1{,}05) \approx \frac{1}{0{,}02}\left(1{,}819 - 1{,}773\right) = 2{,}3$$

presná hodnota: $f'(1{,}05) = 2{,}2751458817295476$

Pri väčšom zaokrúhlení (väčšej nepresnosti funkčných hodnôt) sme dostali horší výsledok pri menšom kroku. Vysvetlenie:

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}(f_2 - f_0) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_2]$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{2h}(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_0)$$

$\tilde{f}_0, \tilde{f}_2$ – približné funkčné hodnoty

$$\left| f'(x_1) - \frac{1}{2h}(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_0) \right| \leq \frac{1}{2h}\left(|f_2 - \tilde{f}_2| + |f_0 - \tilde{f}_0| \right) + \frac{h^2}{6} |f'''(\xi)|$$

(označme $\varepsilon = \max\{|f_2 - \tilde{f}_2|, |f_0 - \tilde{f}_0|\}$, $M = \max_{x \in [x_0, x_2]} |f'''(x)|$)

$$\Rightarrow \left| f'(x_1) - \frac{1}{2h}(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_0) \right| \leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{h}}_{\to \infty \text{ pre } h \to 0} + \underbrace{\frac{h^2}{6} M}_{\to 0 \text{ pre } h \to 0}$$

Prvý člen chyby narastá so zmenšujúcim sa krokom.

príklad 2. Odvoďte päťbodovú formulu pre ekvidištantné uzly v tvare

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}\left(f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2\right).$$

x_i	x_{-2}	x_{-1}	x_0	x_1	x_2
f_i	f_{-2}	f_{-1}	f_0	f_1	f_2

$h = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{2, 1, 0, -1\}$

$$\omega(x) = \prod_{i=-2}^{2} (x - x_i) = (x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\Pi_i(x) = \frac{\omega(x)}{x - x_i} \qquad L_i(x) = \frac{\Pi_i(x)}{\Pi_i(x_i)}, \qquad i \in \{-2,-1,0,1,2\}$$

$$f(x) \approx P(x) = \sum_{i=-2}^{2} f_i L_i(x) \qquad f'(x_0) \approx P'(x_0) = \sum_{i=-2}^{2} f_i L_i'(x_0)$$

$$L_i'(x_0) = \frac{\Pi_i'(x_0)}{\Pi_i(x_i)}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}\right)(\Pi_{-2}(x)) = \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}\right)\left((x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right) = 2h^3$$

$$\left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}\right)(\Pi_{-1}(x)) = \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}\right)\left((x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right) = 4h^3$$

$$\left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}\right)(\Pi_0(x)) = \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}\right)\left((x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)\right) =$$

$$= 2h^3 + 4h^3 - 4h^3 - 2h^3 = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}\right)(\Pi_1(x)) = \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}\right)\left((x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)\right) = -4h^3$$

$$\left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}\right)(\Pi_2(x)) = \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}\right)\left((x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\right) = -2h^3$$

$$\Rightarrow P'(x_0) = f_{-2} \cdot \frac{2h^3}{-h\cdot(-2h)\cdot(-3h)\cdot(-4h)} + f_{-1}\frac{4h^3}{h\cdot(-h)\cdot(-2h)\cdot(-3h)}$$

$$+ f_0 \frac{0}{+2h\cdot(+h)\cdot(-h)\cdot(-2h)} + f_1 \frac{-4h^3}{3h\cdot 2h\cdot h\cdot(-h)}$$

$$+ f_2 \frac{-2h^3}{4h\cdot 3h\cdot 2h\cdot h}$$

$$= \frac{1}{12h}\left(f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2\right)$$

numerické integrovanie

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f_i = Q(f)$$ – všeobecná kvadratúrna formula

$w(x)$ – váhová funkcia (pre $w(x) \equiv 1$ odhadujeme integrál funkcie f na intervale $[a, b]$)

A_i – koeficienty kvadratúrnej formule

$Q(f)$ má stupeň presnosti p $\Leftrightarrow$ je presná pre polynómy do stupňa p (vrátane)

$Q(f)$ pre $n+1$ uzlov má stupeň presnosti najviac $2n+1$ $\rightsquigarrow$ Gaussove formule

integrácia interpolačného polynómu na ekvidištantných uzloch $\rightsquigarrow$ Newton-Cotesove formule

príklad. Nasledujúce integrály vypočítajte a) lichobežníkovým, b) Simpsonovým pravidlom. Výsledky porovnajte s presnými hodnotami.

1) $$\int_1^2 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1 \approx 0{,}386294361119891$$

2) $$\int_0^{0,1} x^{\frac{1}{3}}\,dx = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}}\right]_0^{0,1} = \frac{3}{4}\, 0{,}1^{\frac{4}{3}} \approx 0{,}0348119$$

3) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^2\,dx = \cancel{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-(\cos x)^2}\,\sin x\,dx}$$

I. $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

II. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

I. − II.

$1 - \cos(2x) = 2\sin^2 x$

$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}307092424652189$$

a) lichobežníkové pravidlo: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

1) $\int_1^2 \ln x\,dx \approx \frac{2-1}{2}(\ln 2 + \ln 1) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}34657359$

2) $\int_0^{0{,}1} x^{\frac{1}{3}}\,dx \approx \frac{0{,}1-0}{2}\left(0{,}1^{\frac{1}{3}} + 0^{\frac{1}{3}}\right) = 0{,}05 \cdot \sqrt[3]{0{,}1}$

$\approx 0{,}02320794417$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\,dx \approx \frac{\frac{\pi}{3}-0}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2 0\right) = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{3}{4}$

$\approx 0{,}3926990816987$

b) Simpsonovo pravidlo: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

1) $\int_1^2 \ln x\,dx \approx \frac{2-1}{6}\left(\ln 1 + 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln 2\right)$

$\approx 0{,}385834602$

2) $\int_0^{0{,}1} x^{\frac{1}{3}}\,dx \approx \frac{0{,}1-0}{6}\left(0^{\frac{1}{3}} + 0{,}05^{\frac{1}{3}}\cdot 4 + 0{,}1^{\frac{1}{3}}\right)$

$\approx 0{,}03229619138$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\,dx \approx \frac{\frac{\pi}{3}-0}{6}\left(\sin^2 0 + 4\sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{3}\right)$

$\approx 0{,}305432619$

príklad. Odvoďte Newtonovu-Cotesovu formulu uzavretého typu pre interval $[a,b]$ a $n=3$ (pravidlo 3/8).

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(a+\frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a+\frac{2(b-a)}{3}\right) + f(b)\right)$$

$f(x) \approx P(x)$ - interpolačný polynóm $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P(x)\,dx$

$$h = \frac{b-a}{3} \Rightarrow x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h,\ x_3 = a+3h = b$$

$$P(x) = f_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

x_i	f_i			
a	f_0			
		$\frac{f_1-f_0}{h}$		
$a+h$	f_1		$\frac{f_2-2f_1+f_0}{2h^2}$	
		$\frac{f_2-f_1}{h}$		$\frac{f_3-3f_2+3f_1-f_0}{6h^3}$
$a+2h$	f_2		$\frac{f_3-2f_2+f_1}{2h^2}$	
		$\frac{f_3-f_2}{h}$		
$a+3h$	f_3			

$$\int_a^b 1\,dx = b-a = \boxed{\frac{b-a}{8}\cdot 8}$$

$$\int_a^b x-a\,dx = \left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^b = \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b-a}{8}\cdot 4(b-a) = \boxed{\frac{b-a}{8}\cdot 12h}$$

$$\int_a^b (x-a)\underbrace{(x-(a+h))}_{(x-a)-h}\,dx = \int_a^b (x-a)^2 - h(x-a)\,dx =$$

$$= \left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^b - h\int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(b-a)^3}{3} - h\frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= (b-a)^2\left(\frac{b-a}{3} - \frac{h}{2}\right) = (b-a)^2\cdot\frac{h}{2} = (b-a)\cdot\frac{3}{2}h^2 = \boxed{\frac{b-a}{8}\cdot 12h^2}$$

$$\int_a^b (x-a)\underbrace{(x-(a+h))}_{(x-a)-h}\underbrace{(x-(a+2h))}_{(x-a)-2h}\,dx = \int_a^b (x-a)\left((x-a)^2 - 3h(x-a) + 2h^2\right)dx$$

$$= \int_a^b (x-a)^3 - 3h(x-a)^2 + 2h^2(x-a)\, dx =$$

$$= \left[\frac{(x-a)^4}{4}\right]_a^b - h\left[(x-a)^3\right]_a^b + h^2\left[(x-a)^2\right]_a^b =$$

$$= \frac{(b-a)^4}{4} - h(b-a)^3 + h^2(b-a)^2 = (b-a)^2\left(\frac{9}{4}h^2 - 3h^2 + h^2\right) =$$

$$= (b-a)^2 \cdot \frac{h^2}{4} = \boxed{\frac{b-a}{8} \cdot 6h^3}$$

$$\int_a^b P(x)\,dx = f_0 \cdot \frac{b-a}{8} \cdot 8 + \frac{f_1 - f_0}{h} \cdot \frac{b-a}{8} \cdot 12h$$

$$+ \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2} \cdot \frac{b-a}{8} \cdot 12h^2 + \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{6h^3} \cdot \frac{b-a}{8} \cdot 6h^3 =$$

$$= \frac{b-a}{8}\left(8f_0 + 12f_1 - 12f_0 + 6f_2 - 12f_1 + 6f_0 + f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0\right)$$

$$= \frac{b-a}{8}\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right)$$

príklad. Určte neznáme uzly x_0 a x_1 a koeficienty A_0, A_1 pre formulu

$$\int_0^\pi \sin x\, f(x)\, dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

tak, aby bol dosiahnutý maximálny stupeň presnosti.

Počet koreňov je $n+1=2$, takže maximálny stupeň presnosti je $2n+1=3$. Formula má byť teda presná pre polynómy do stupňa 3. Stačí overiť pre $1, x, x^2, x^3$:

$$f(x)=x^0: \int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = 1-(-1) = 2 = A_0 + A_1$$

$$f(x)=x^1: \int_0^\pi \overset{u'}{\sin x}\cdot \overset{v}{x}\, dx = [-\overset{u}{\cos x}\cdot \overset{v}{x}]_0^\pi + \int_0^\pi \overset{u}{\cos x}\cdot \overset{v'}{1}\, dx$$

$$= \pi + 0 = A_0 x_0 + A_1 x_1$$

$$f(x)=x^2: \int_0^\pi \overset{u'}{\sin x}\cdot \overset{v}{x^2}\, dx = [-\overset{u}{\cos x}\cdot \overset{v}{x^2}]_0^\pi + 2\int_0^\pi \overset{u}{\cos x}\cdot \overset{v'}{x}\, dx$$

$$= \pi^2 + 2[\sin x\cdot x]_0^\pi - 2\int_0^\pi \sin x\, dx$$

$$= \pi^2 - 4 = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2$$

$$f(x)=x^3: \int_0^\pi \sin x\cdot x^3\, dx = [-\cos x\cdot x^3]_0^\pi + 3\int_0^\pi \cos x\cdot x^2\, dx$$

$$= \pi^3 + 3[\sin x\cdot x^2]_0^\pi - 6\int_0^\pi \sin x\cdot x\, dx$$

$$= \pi^3 - 6\pi = A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3$$

Riešme systém 4 rovníc so 4 neznámymi:

$$\text{I.} \quad A_0 + A_1 = 2$$
$$\text{II.} \quad A_0 x_0 + A_1 x_1 = \pi$$
$$\text{III.} \quad A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \pi^2 - 4$$
$$\text{IV.} \quad A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = \pi^3 - 6\pi$$

Nájdeme koeficienty polynómu

$$\begin{aligned} \omega(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\ &= x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0 x_1 \\ &= x^2 + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

$a_0 \cdot \text{I} + a_1 \cdot \text{II} + \text{III}$:

$$A_0 (\underbrace{x_0^2 + a_1 x_0 + a_0}_{0}) + A_1 (\underbrace{x_1^2 + a_1 x_1 + a_0}_{0}) = \pi^2 - 4 + \pi a_1 + 2a_0$$

$$\Rightarrow 2a_0 + \pi a_1 = 4 - \pi^2$$

$a_0 \cdot \text{II} + a_1 \cdot \text{III} + \text{IV}$:

$$A_0 x_0 (\underbrace{x_0^2 + a_1 x_0 + a_0}_{0}) + A_1 x_1 (\underbrace{x_1^2 + a_1 x_1 + a_0}_{0}) = \pi^3 - 6\pi + (\pi^2 - 4) a_1 + \pi a_0$$

$$\Rightarrow \pi a_0 + (\pi^2 - 4) a_1 = 6\pi - \pi^3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & \pi & 4 - \pi^2 \\ \pi & \pi^2 - 4 & 6\pi - \pi^3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & \pi & 4 - \pi^2 \\ 0 & \frac{\pi^2}{2} - 4 & 4\pi - \frac{\pi^3}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & \pi & 4 - \pi^2 \\ 0 & 1 & -\pi \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= -\pi \\ a_0 &= \frac{4 - \pi^2 - (-\pi)\cdot\pi}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\omega(x) = x^2 - \pi x + 2$$

$$x_{0,1} = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 8}}{2}$$

A_0 a A_1 dopočítame z rovníc I a II. (lineárny systém)

evidentne platí $A_0 = A_1 = 1$

Príklad 1. Odhadnite funkčné hodnoty distribučnej funkcie štandardizovaného normálneho rozdelenia

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Vzhľadom k tomu, že platí

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x),$$

je funkcia $f(x)$ riešením lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu

$$f''(x) + xf'(x) = 0.$$

Funkčné hodnoty odhadneme na intervale $[0,5]$. Nech $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = 5$ je $n+1$ ekvidištantných uzlov na tomto intervale. Prvú a druhú deriváciu funkcie f vo vnútorných uzloch $x_1, \ldots, x_{n-1}$ aproximujeme pomocou jej funkčných hodnôt $f_0, \ldots, f_n$ a pomocou nasledujúcich formúl:

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \qquad f''(x_i) \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}, \qquad i \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

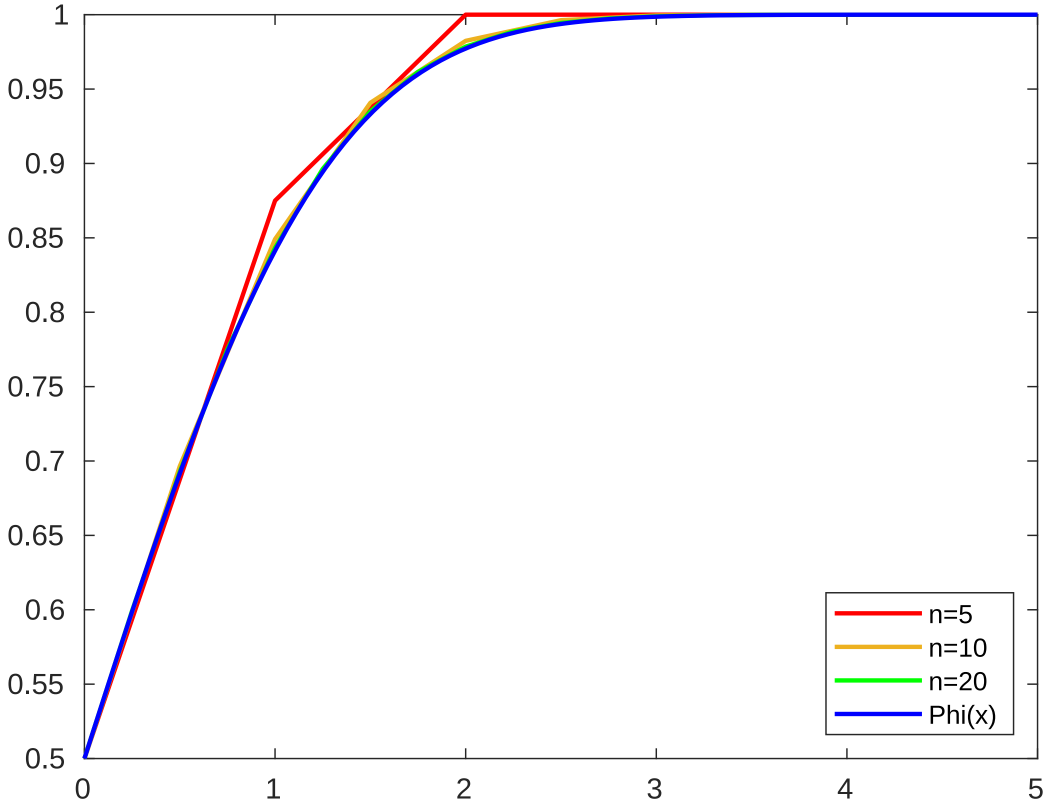
To nás privedie k $n-1$ lineárnym rovniciam pre $n+1$ neznámych funkčných hodnôt $f_0, \ldots, f_n$:

$$\begin{aligned} f''(x_i) + x_i f'(x_i) &= 0, \\ \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + x_i \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} &= 0, \\ (2 - hx_i)f_{i-1} - 4f_i + (2 + hx_i)f_{i+1} &= 0, \qquad i \in \{1, \ldots, n-1\}. \end{aligned}$$

Zvyšné dve rovnice dostaneme z okrajových podmienok: $f_0 = 1/2$ a vzhľadom k tomu, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, môžeme použiť $f_n = 1$. Stačí už len zvoliť n a príslušný systém rovníc vyriešiť.

```
function[x]=int_exp_dif(n,a)

h=a/n;

A=-4*eye(n+1)+2*diag([ones(1,n-1) 0],-1)-h*diag([h:h:(a-h) 0],-1)
   +2*diag([0 ones(1,n-1)],1)+h*diag([0 h:h:(a-h)],1);
A(1,1)=1;
A(n+1,n+1)=1;

b=zeros(n+1,1);
b(1,1)=1/2;
b(n+1,1)=1;

x=linsolve(A,b);

end

x=int_exp_dif(5,5);
t=linspace(0,5,6);
plot(t,x,'r-','LineWidth',1.5)
```

```
hold on

x=int_exp_dif(10,5);
t=linspace(0,5,11);
plot(t,x,'-','Color','[0.929 0.694 0.125]','LineWidth',1.5)

x=int_exp_dif(20,5);
t=linspace(0,5,21);
plot(t,x,'g-','LineWidth',1.5)

legend('n=5','n=10','n=20','Location','southeast')

t=linspace(0,5,100);
plot(t,erf(t/sqrt(2))/2+1/2,'b-','DisplayName','Phi(x)','
   LineWidth',1.5);
```



✈

Príklad 2. Odhadnite funkčné hodnoty Fresnelových integrálov

$$x(t) = \int_0^t \cos(s^2)\,\mathrm{d}s, \qquad y(t) = \int_0^t \sin(s^2)\,\mathrm{d}s.$$

Vzhľadom k tomu, že platí

$$x'(t) = \cos(t^2), \qquad x''(t) = -2t\sin(t^2),$$
$$y'(t) = \sin(t^2), \qquad y''(t) = 2t\cos(t^2),$$

sú funkcie $x(t)$ a $y(t)$ riešením systému dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu

$$\begin{aligned} x''(t) + 2ty'(t) &= 0, \\ y''(t) - 2tx'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Funkčné hodnoty odhadneme na intervale $[-7, 7]$. Nech $t_{-n}, \ldots, t_n$ je $2n+1$ ekvidištantných uzlov na tomto intervale. Prvú a druhú deriváciu funkcií x a y vo vnútorných uzloch aproximujeme rovnako ako v predošlom príklade. To nás privedie k nasledujúcemu systému $4n-2$ lineárnych rovníc pre $4n+2$ neznámych funkčných hodnôt $x_{-n}, \ldots, x_n$ a $y_{-n}, \ldots, y_n$:

$$\begin{aligned} \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2} + 2t_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} &= 0, \qquad i \in \{-n+1, \ldots, n-1\} \\ \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - 2t_i \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h} &= 0, \qquad i \in \{-n+1, \ldots, n-1\}, \end{aligned}$$

ktorý má po úprave tvar

$$\begin{aligned} x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + ht_i(y_{i+1} - y_{i-1}) &= 0, \qquad i \in \{-n+1, \ldots, n-1\} \\ y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} - ht_i(x_{i+1} - x_{i-1}) &= 0, \qquad i \in \{-n+1, \ldots, n-1\}, \end{aligned}$$

Vďaka limitným vzťahom

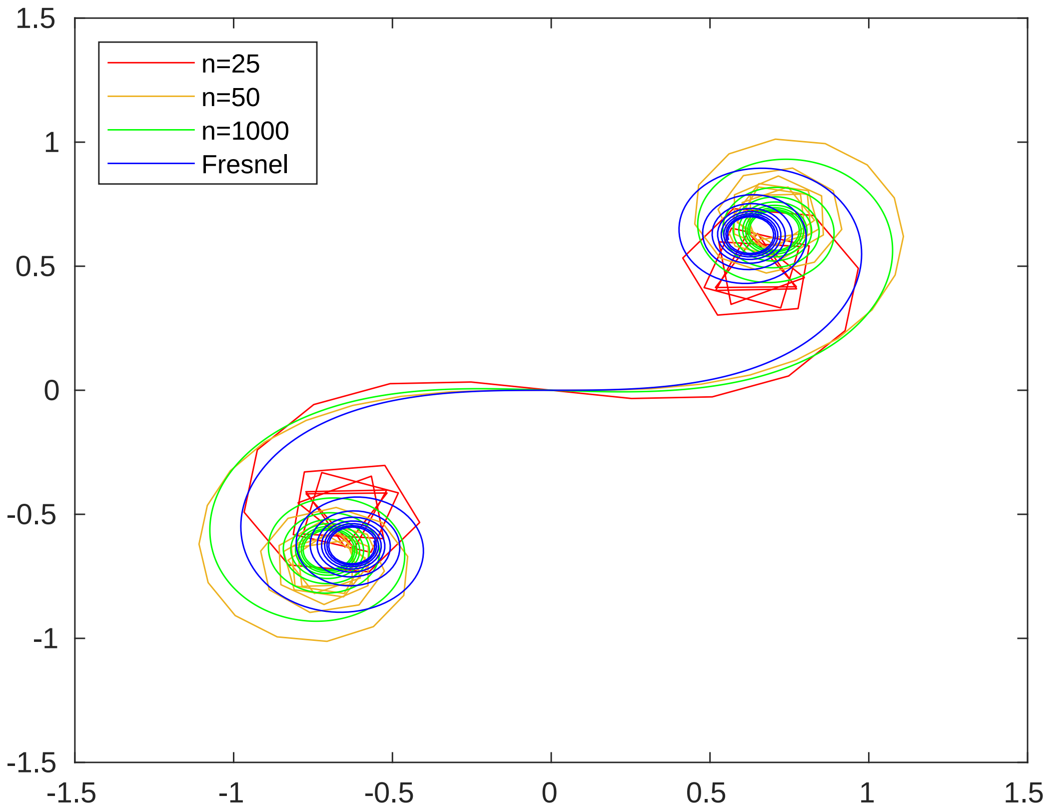
$$\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = \pm\sqrt{\frac{\pi}{8}}, \qquad \lim_{t \to \pm\infty} y(t) = \pm\sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

môžeme dodefinovať zvyšné štyri rovnice nasledujúcim spôsobom:

$$x_{-n} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}, \quad x_n = \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \quad y_{-n} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}, \quad y_n = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

```
function [x]=fresnel_num_dif(n,a)

h=a/n;

A11=(diag([ones(1,2*n-1) 0],-1)+diag([1 -2*ones(1,2*n-1) 1])+diag
    ([0 ones(1,2*n-1)],1));

A12=-h*diag([((-a+h):h:(a-h)) 0],-1)+h*diag([0 ((-a+h):h:(a-h))
    ],1);

A=[A11 A12;-A12 A11];

b=zeros(4*n+2,1);
b(1,1)=-sqrt(pi/8);
b(2*n+1,1)=sqrt(pi/8);
b(2*n+2,1)=-sqrt(pi/8);
b(4*n+2,1)=sqrt(pi/8);

x=linsolve(A,b);

end
```

```
x=fresnel_num_dif(25,7);
plot(x(1:(2*25+1),1),x((2*25+2):(4*25+2),1),'r-')

hold on

x=fresnel_num_dif(50,7);
plot(x(1:(2*50+1),1),x((2*50+2):(4*50+2),1),'-','Color','[0.929
   0.694 0.125]')

x=fresnel_num_dif(1000,7);
plot(x(1:(2*1000+1),1),x((2*1000+2):(4*1000+2),1),'g-')

legend('n=50','n=100','n=1000','Location','northwest')

t=linspace(-7,7,800);
plot(sqrt(pi/2)*fresnelc(sqrt(2/pi)*t),sqrt(pi/2)*fresnels(sqrt
   (2/pi)*t),'b-','DisplayName','Fresnel');
```



Fresnelove integrály evidentne konvergujú dosť pomaly a interval $[-7, 7]$ nie je dosť široký na to, aby sme v jeho krajných bodoch mohli ako okrajové podmienky použiť ich limitné hodnoty. Navyše ak nás zaujíma len tvar počiatočnej časti krivky, môžeme odhadnúť hodnoty Fresnelových integrálov v krajných bodoch užšieho intervalu a tie použiť ako okrajovú podmienku. Zameriame sa na interval $[-1, 1]$ a odhad uskutočníme pomocou Taylorovho rozvoja funkcií $\sin(x^2)$ a $\cos(x^2)$.

Pripomeňme, že funkcia sínus sa dá na celom svojom definičnom obore rozvinúť do svojho Taylorovho radu:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Taylorov rad funkcie $\sin(x^2)$ má preto tvar

$$T(x) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}.$$

Dá sa ukázať, že v každom bode $x \in \mathbb{R}$ platí $T(x) = \sin(x^2)$. Integrujme:

$$\int_0^1 \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{4n+2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{4n+2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)} t^{4n+3} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}.$$

Uvedený rad je alternujúci a pre chybu aproximácie n-tým čiastočným súčtom máme horný odhad:

$$\left| \int_0^1 \sin(t^2)\,\mathrm{d}t - s_n \right| < |a_{n+1}|\,.$$

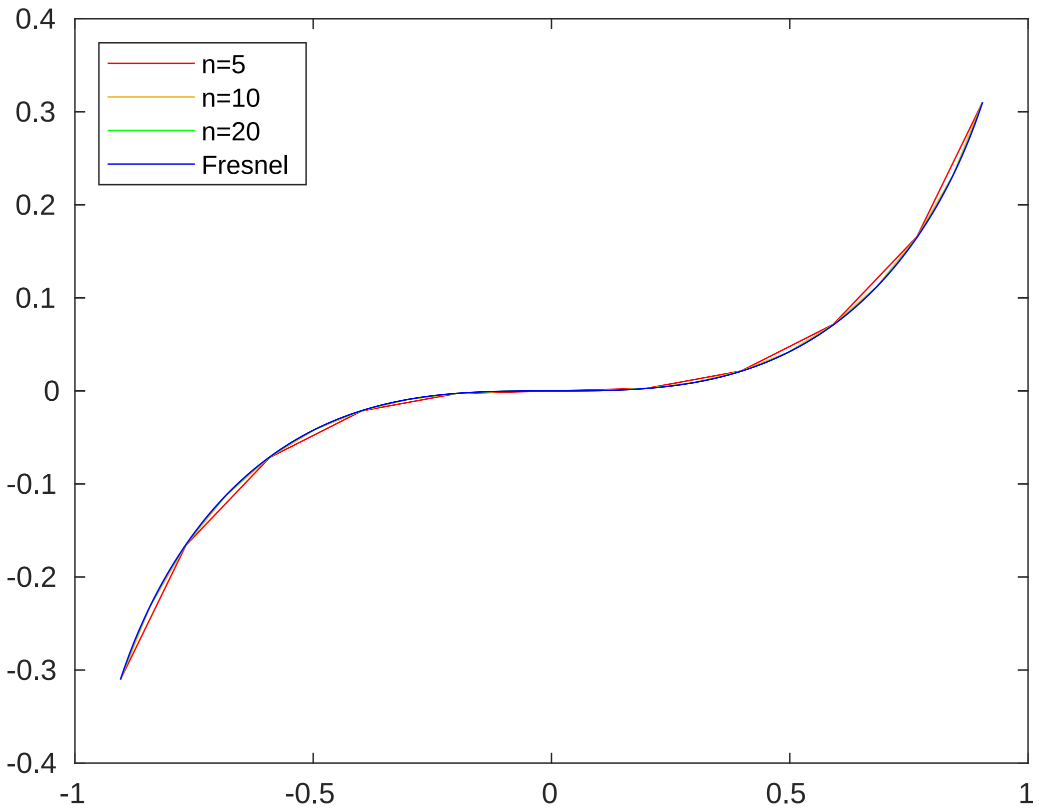
Zvoľme presnosť 10^{-4}, takže potrebujeme nájsť n, pre ktoré platí $|a_{n+1}| < 10^{-4}$:

$$\frac{1}{(2n+3)!(4n+7)} < 10^{-4}$$
$$(2n+3)!(4n+7) > 10^4$$

Zrejme prvé n, pre ktoré táto rovnosť platí je $n = 2$. Určme teda približnú hodnotu integrálu:

$$\int_0^1 \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{120 \cdot 11} = \frac{13 \cdot 20 \cdot 11 + 7}{7 \cdot 120 \cdot 11} = 0,310\overline{281385}$$
$$\approx 0,31028.$$

Podobne by sme sa dopracovali aj k odhadu $x(1) \approx 0,90452$.



Krivka $(x(t), y(t))$ sa používa pri stavbe ciest a železníc. ✈