LU rozklad matice A:

$A = L \cdot U$ L – dolná △ matica U – horná △ matica

$Ax = b$ $LUx = b$ $Ux = u$

$Lu = b$ → riešime od prvej rovnice

riešime od poslednej rovnice

GEM bez výmeny riadkov nám dá LU rozklad:

$U = \underbrace{G_{n-1} \cdots G_1}_{L^{-1}} A$

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -l_{n,i} & & 1 \end{pmatrix}$$

zaznamenávame multiplikátory

$\underbrace{G_1^{-1} \cdots G_{n-1}^{-1}}_{L} U = A$

$$G_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & l_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & l_{n,i} & & 1 \end{pmatrix}$$

$l_{ki} = \frac{a_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$ skriptá

$\Big(l_{ki} = -\frac{a_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$ prednáška $\Big)$

GEM s výmenou riadkov:

$U = G_{n-1} P_{n-1} \cdots G_1 P_1 A$ P_i sú permutačné matice

ak $i > j$, potom $P_i G_j = \tilde{G}_j P_i$

↓

sú vymenené príslušné multiplikátory

$U = \overline{G}_{n-1} \cdots \overline{G}_1 \cdot P_{n-1} \cdots P_1 A$

$\underbrace{\overline{G}_1^{-1} \cdots \overline{G}_{n-1}^{-1}}_{L} \cdot U = P_{n-1} \cdots P_1 A = PA$

~~pri výmene riadkov stačí~~ stačí v pamäti udržiavať poradie riadkov

keď narazíme na potrebu vymeniť riadky matice A, vymeníme aj doteraz vypočítané prvky matice L v týchto riadkoch. To nám dá rozklad matice PA:

$LU = PA$ $Ax = b$ $Ux = u$

$LUx = PAx = Pb$ $Lu = Pb$

príklad.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \phantom{{}-x_4} &= 6, \\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 - x_4 &= -11, \\ 6x_1 - 13x_2 + x_3 + 5x_4 &= 15, \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -6. \end{aligned}$$

Pomocou GEM nájdite LU rozklad matice A tejto sústavy. S jeho pomocou tento systém vyriešte.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & -1 & -1 \\ 6 & -13 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = LU$$

$Ax = b$ $\qquad u_1 = 6$

$LUx = b$ $\qquad u_2 = 12 - 11 = 1$

I. $Ux = u$ $\qquad u_3 = -3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 15 = 1$

II. $Lu = b$ $\qquad u_4 = 6 - 2 \cdot 1 - 1 - 6 = -3$

$$x_4 = \frac{-3}{3} = -1 \qquad x_3 = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$x_2 = -1 - 1 + 1 = -1 \qquad x_1 = \frac{-1-3+6}{2} = 1$$

príklad.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy nájdite LU rozklad matice PA, kde P je vhodná permutačná matica. Pomocou tohto rozkladu nájdite riešenie rovnice $Ax = (4, -2, -3, -5)^T$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{3} & 1 & 0 \\ \boxed{2} & \cancel{\ } & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0 \quad 3} & & 1 & 0 \\ \boxed{2 \quad 0} & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L$$

$(1,2,3,4), (3,2,1,4), (3,4,1,2), (3,4,2,1)$

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} = LU$$

$Ax = b$

$PAx = Pb$

$LUx = Pb$

I. $Ux = u$

II. $Lu = Pb$

II. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$u_1 = -3$

$u_2 = -5 - 2(-3) = 1$

$u_3 = -2 - 2(-3) = 4$

$u_4 = -3 + 4 = 1$

$x_4 = 1 \qquad x_3 = \frac{-2+4}{-2} = -1 \qquad x_2 = 1 - 1 + 1 = 1$

$x_1 = 1 - 2(-1) - 1 - 3 = -1$

príklad: Pomocou GEM s výberom (čiastočným aj úplným) pivota riešte nasledujúci systém lineárnych rovníc:

$$
\begin{aligned}
2x + 2y + 6z &= -2 \\
3x + 2y + z &= 4 \\
2x - y + 2z &= -1
\end{aligned}
$$

čiastočný výber: pivot je prvok s max. abs. hodnotou v danom stĺpci

úplný výber: pivot je prvok s max. abs. hodnotou v aktuálnej submatici

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 2 & 6 & -2 \\ \boxed{3} & 2 & 1 & 4 \\ \boxed{2} & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{16}{3} & \cancel{-4}\,-\frac{14}{3} \\ 0 & \boxed{-\frac{7}{3}} & \frac{4}{3} & -\frac{11}{3} \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{14}{3} \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \frac{120}{21} & -\frac{120}{21} \end{array}\right)
$$

$\cancel{\frac{8}{7} + \frac{16}{3} = \frac{24+112}{21} = \frac{136}{21}}$

$\frac{8}{21} + \frac{112}{21} = \frac{120}{21}$

$-\frac{22}{21} - \frac{98}{21} = -\frac{120}{21}$

$z = -1, \quad y = 1, \quad x = 1$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & \boxed{6} & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & -2 \\ \boxed{\frac{8}{3}} & \frac{5}{3} & 0 & \frac{13}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & -2 \\ \frac{8}{3} & \frac{5}{3} & 0 & \frac{13}{3} \\ 0 & -\frac{15}{6} & 0 & -\frac{15}{6} \end{array}\right)
$$

$y = 1, \quad x = 1, \quad z = -1$