cvičenie ~~X~~ 6 iteračné metódy riešenia systémov lineárnych rovníc

$Ax=b$, A je regulárna matica $n\times n$

$Ax=b \iff x = Tx + g$

Jacobiho metóda: z i-tej rovnice vyjadríme i-tu neznámu

$$x_i = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad \forall i\in\{1,\dots,n\}$$

iteračný proces: $$x_i^{k+1} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Gaussova-Seidelova metóda: pri výpočte x_i^{k+1} použijeme už vypočítané hodnoty $x_1^{k+1},\dots,x_{i-1}^{k+1}$:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

postačujúce podmienky pre konv. JM a GSM pre akúkoľvek poč. podm. sú:

- silné riadkové sumačné kritérium: $\forall i\in\{1,\dots,n\}: |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ — A je rýdzo riadkovo diagonálne dominantná
- silné stĺpcové sumačné kritérium: $\forall i\in\{1,\dots,n\}: |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|$ — A je rýdzo stĺpcovo diagonálne dominantná

príklad: Rozhodnite, či pre systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 4x + y - z &= 4 \\ 2x - 4y + z &= -1 \\ x - 2y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

metódy JM a GSM konvergujú pre každú voľbu počiatočnej podmienky. Ak áno, použite ich pre výpočet prvých dvoch aproximácií riešenia tohto systému a porovnajte rýchlosť konv.

$Ax=b \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

A spĺňa obidve kritériá

JM:
$$x_{k+1} = \frac{1}{4}(-y_k + z_k + 4)$$
$$y_{k+1} = -\frac{1}{4}(-2x_k - z_k - 1) = \frac{1}{4}(2x_k + z_k + 1)$$
$$z_{k+1} = \frac{1}{4}(\cancel{\quad}) = \frac{1}{4}(-x_k + 2y_k + 3)$$

$$(x_0, y_0, z_0) = 0 \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 4\right) = \frac{9}{8}$$
$$y_2 = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{3}{4} + 1\right) = \frac{15}{16}$$
$$z_2 = \frac{1}{4}\left(-1 + \frac{1}{2} + 3\right) = \frac{5}{8}$$

GSM:
$$x_{k+1} = \frac{1}{4}(-y_k + z_k + 4)$$
$$y_{k+1} = \frac{1}{4}(2x_{k+1} + z_k + 1)$$
$$z_{k+1} = \frac{1}{4}(-x_{k+1} + 2y_{k+1} + 3)$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$$
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + 4\right) = \frac{33}{32}$$
$$y_1 = \frac{1}{4}(2 + 0 + 1) = \frac{3}{4} \qquad y_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{33}{16} + \frac{7}{8} + 1\right) = \frac{63}{64}$$
$$z_1 = \frac{1}{4}\left(-1 + \frac{3}{2} + 3\right) = \frac{7}{8} \qquad z_2 = \frac{1}{4}\left(-\frac{33}{32} + \frac{63}{32} + 3\right) = \frac{126}{128} = \frac{63}{64}$$

skutočné riešenie je $x^* = (1,1,1)$.

Iteračný proces $x^{k+1} = Tx^k + g$ konverguje ku x^*, kde $x^* = Tx^* + g$, (pre ľubovoľné x_0) práve vtedy, keď $\rho(T) < 1$.

príklad: Rozhodnite, či pre systém lineárnych rovníc

$$x - y - z = -1$$
$$-x + 2y + z = 2$$
$$-x + 6y - 2z = 3$$

GSM konverguje pre každú voľbu počiatočnej podmienky. Ak áno, použite ju pre výpočet prvých dvoch aproximácií riešenia tohto systému.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A nie je ani RRDD ani RSDD

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$
$$(D + L + U)x = b \qquad \cancel{\Leftrightarrow Dx = -(L+U)x + b}$$
$$(D + L)x = -Ux + b$$
$$x = \underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{T_G} x + \underbrace{(D+L)^{-1}b}_{g}$$

GSM konv. $\forall x_0 \Leftrightarrow \rho(T_G) < 1$

$$(D+L)^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

where the last right block is $(D+L)^{-1}$.

$$T_G = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

vlastné čísla T_G:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix}$$
$$= \lambda\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) \Rightarrow \lambda \in \left\{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow \rho(T_G) = \frac{1}{2} < 1$$

$x_{k+1} = -(D+L)^{-1} U x_k + (D+L)^{-1} b$ (maticový zápis GSM)

$(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$

$(x_1, y_1, z_1) = (D+L)^{-1}(b) = (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

~~Pr~~ Príklad: Rozhodnite, či pre systém lineárnych rovníc

$4x + y - 5z = 0$ JM konv. pre každú voľbu poč. podm.

$2y + 2z = 3$ ak áno použite ju pre výpočet prvých

$x + 4y + 4z = 9$ dvoch aproximácií riešenia tohto systému.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

A nie je ani RRDD ani RSDD

~~Ax=b~~ $Ax = b \iff (D+L+U)x = b$

$Dx = -(L+U)x + b$

$$x = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{T_J} x + \underbrace{D^{-1} b}_{g}$$

$$T_J = -\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

charakteristický polynóm:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -\frac{1}{4} & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \frac{1}{16} - \left(\frac{5}{16}\lambda - \lambda\right) =$$

$$= -\lambda^3 + \frac{11}{16}\lambda - \frac{1}{16}$$

Skúsime pomocou Sturmovej postupnosti nájsť počet reálnych koreňov v intervale $(-1,1)$:

$P(x) = 16x^3 - 11x + 1 = P_0(x)$

$P_1(x) = -P_0'(x) = -48x^2 + 11$

$$(16x^3 - 11x + 1) : (-48x^2 + 11) = -\frac{x}{3}$$

$$\frac{-(16x^3 - \frac{11}{3}x)}{-\frac{22}{3}x + 1}$$

$$P_0(x) = P_1(x) \cdot \left(-\frac{x}{3}\right) \underbrace{- \frac{22}{3}x + 1}_{-\frac{1}{3}\underbrace{(22x - 3)}_{P_2(x)}}$$

$$(-48x^2 + 11) : (22x - 3) = -\frac{24}{11}x - \frac{36}{11^2}$$

$$\frac{-(-48x^2 + \frac{72}{11}x)}{-\frac{72}{11}x + 11}$$

$$\frac{-\left(-\frac{72}{11}x + \frac{108}{11^2}\right)}{11 - \frac{108}{121}}$$

$$P_1(x) = P_2(x) \cdot \left(-\frac{24}{11}x - \frac{36}{121}\right) + \underbrace{11 - \frac{108}{121}}_{\left(\frac{108}{121} - 11\right) \cdot \underbrace{(-1)}_{P_3(x)}}$$

Sturmova postupnosť: $P_0(x) = 16x^3 - 11x + 1$

$P_1(x) = -48x^2 + 11$

$P_2(x) = 22x - 3$

$P_3(x) = -1$

	P_0	P_1	P_2	P_3	W
1	$+$	$-$	$+$	$-$	3
-1	$-$	$-$	$-$	$-$	0

$W(1) - W(-1) = 3$

Polynóm ~~P~~ $-\lambda^3 + \frac{11}{16}\lambda - \frac{1}{16}$ má 3 reálne korene a všetky ležia v intervale $(-1,1)$. Preto $\rho(T_J) < 1$ ✓

JM konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú podmienku.

$(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$

$(x_1, y_1, z_1) = D^{-1} b = (0, \frac{3}{2}, \frac{9}{4})$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} + \frac{45}{16} + \cancel{\frac{1}{4}}\,0 \\ -\frac{9}{4} + \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{39}{16} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

príklad. Koľko krokov JM resp. GSM by sme potrebovali na určenie riešenia systému z príkladu 1 s absolútnou chybou počítanou v metrike $\|\cdot\|_\infty$ menšou než 10^{-3}?

~~$x_{k+1} = Tx_k + g$~~ $x_{k+1} = Tx_k + g$

$$\|x_* - x_k\| \le \frac{\|T\|^k}{1-\|T\|}\|x_1 - x_0\|$$

maticová norma pridružená k vektorovej ~~forme~~ norme

$$\|v\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|v_i| \qquad v = (v_1, \dots, v_n)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|x_* - x_k\|_\infty \le \frac{\|T\|_\infty^k}{1-\|T\|_\infty}\|x_1 - x_0\|_\infty$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

JM

$$T_J = -D^{-1}(L+U)$$

$$T_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|T_J\|_\infty = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4}$$

$$x_0 = (0,0,0)$$
$$x_1 = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$
$$\|x_1 - x_0\|_\infty = \max\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\} = 1$$

GSM

$$T_G = -(D+L)^{-1}U$$

$$T_G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\|T_G\|_\infty = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right\} = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = (0,0,0)$$
$$x_1 = \left(1, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$$
$$\|x_1 - x_0\|_\infty = \max\left\{1, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\} = 1$$

JM: $\|x_* - x_k\|_\infty \le \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^k}{1-\frac{3}{4}}\cdot 1 \le 10^{-3}$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k \le \frac{1}{4}\cdot 10^{-3} = 4^{-1}\cdot 10^{-3} \quad /\log_{10}$$

$$k\cdot\log_{10}\frac{3}{4} \le -\log_{10}4 - 3$$

$$k \ge \frac{-\log_{10}4 - 3}{\log_{10}3 - \log_{10}4} \approx 28{,}83$$

JM stačí $k = 29$ krokov

GSM: $\|x_* - x_k\|_\infty \le \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}\cdot 1 = 10^{-3}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \le 10^{-3}$$

$$10^3 \le 2^{k-1}$$

$$10 \le k-1 \Rightarrow 11 \Rightarrow$$

GSM stačí $k = 11$ krokov

e_1: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$
e_2: $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

$$T_G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{pmatrix}$$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

$$x_1^{k+1} = -\frac{a_{22}}{a_{21}}x_2^k + \frac{b_2}{a_{21}}$$

$$x_2^{k+1} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1^{k+1} + \frac{b_1}{a_{12}}$$

$$= \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}}x_2^k + \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}b_2}{a_{12}a_{21}}$$

$$T_G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{22}}{a_{21}} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda\left(\lambda - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}}\right)$$

$$-2x + y = -1$$
$$x - 2y = -1$$