Veta 1. *Ak $f \in C[a,b]$ a $f(a)f(b) < 0$, potom metóda regula falsi generuje postupnosť konvergujúcu ku koreňu funkcie f, teda predpoklad o tom, že v intervale $[a,b]$ sa nachádza práve jeden koreň funkcie f je zbytočný.*

Dôkaz. V prvom rade si uvedomme, že podľa Bolzanovej vety predpoklady $f \in C[a,b]$ a $f(a)f(b) < 0$ implikujú existenciu aspoň jedného koreňa $\xi \in [a,b]$ funkcie f. Pripomeňme, že metóda regula falsi generuje postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, ktorá je definovaná nasledujúcim spôsobom: $x_0 = a$, $x_1 = b$ a

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_s}{f(x_k) - f(x_s)} f(x_k) = x_s - \frac{x_k - x_s}{f(x_k) - f(x_s)} f(x_s),$$

kde $s = s(k) < k$ je najväčší index taký, že $f(x_s)f(x_k) < 0$. Ak $f(x_k) \neq 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}_0$, potom tento predpis korektne definuje postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. V opačnom prípade označme symbolom k ten index, pre ktorý prvýkrát nastala rovnosť $f(x_k) = 0$ a teda index $s(k)$ nie je definovaný. V takom prípade je evidentne x_k koreň funkcie f a postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ stačí dodefinovať jednoduchým spôsobom: $x_{k+\ell} = x_k$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$. Keďže takto definovaná postupnosť je od istého indexu konštantná a rovná koreňu funkcie f, je tvrdenie vety splnené. Ďalej sa preto budeme zaoberať len prípadom $f(x_k) \neq 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}_0$.

Ukážeme si ekvivalentný popis tejto metódy. Definujme postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ nasledujúcim spôsobom: $a_0 = a$, $b_0 = b$ a ďalej prepdokladajme, že boli definované prvky a_k a b_k pre $k \geq 0$. Zaveďme pomocnú postupnosť $\{\overline{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ predpismi $\overline{x}_0 = a$, $\overline{x}_1 = b$ a

$$\begin{aligned}\overline{x}_{k+2} &= b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(b_k) = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(a_k) \\ &= \frac{f(a_k)}{f(a_k) - f(b_k)} b_k - \frac{f(b_k)}{f(a_k) - f(b_k)} a_k\end{aligned}$$

pre $k \geq 0$ (overte, že uvedené rovnosti skutočne platia). Pomocou veličiny $\overline{x}_{k+2}$ dodefinujeme prvky a_{k+1} a b_{k+1} nasledujúcim spôsobom:

1. $f(a_k)f(\overline{x}_{k+2}) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_{k+1} = a_k, \qquad b_{k+1} = \overline{x}_{k+2}$,
2. $f(\overline{x}_{k+2})f(b_k) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_{k+1} = \overline{x}_{k+2}, \qquad b_{k+1} = b_k$.

Zdôraznime, že vyššie uvedená konštrukcia je formálnym zápisom nám známej geometrickej interpretácie metódy regula falsi. V každom kroku skonštruujeme priamku prechádzajúcu bodmi $[a_k, f(a_k)]$ a $[b_k, f(b_k)]$ a jej prienik $\overline{x}_{k+2}$ s osou x rozdelí interval $[a_k, b_k]$ na dva podintervaly $[a_k, \overline{x}_{k+2}]$ a $[\overline{x}_{k+2}, b_k]$. V ďalšom kroku metódy si zvolíme ten, v ktorého krajných bodoch nadobúda funkcia f opačné znamienka.

Ukážeme, že sa skutočne jedná o dve ekvivalentné charakterizácie tej istej metódy. Na to stačí indukciou dokázať, že pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\{x_k, x_{s(k)}\} = \{a_{k-1}, b_{k-1}\}$ a $\overline{x}_k = x_k$. Vzhľadom k tomu, že $x_{s(1)} = x_0 = a = a_0 = \overline{x}_0$ a $x_1 = b = b_0 = \overline{x}_1$ tvrdenie platí pre $k = 1$. Ďalej predpokladajme, že tvrdenie platí pre $k \geq 1$ a jeho platnosť dokážeme aj pre $k+1$. Indukčný predpoklad $\{x_k, x_{s(k)}\} = \{a_{k-1}, b_{k-1}\}$ spolu s predpismi pre výpočet hodnôt x_{k+1} a $\overline{x}_{k+1}$ implikuje, že $x_{k+1} = \overline{x}_{k+1}$. Zostáva nám overiť rovnosť $\{x_{k+1}, x_{s(k+1)}\} = \{a_k, b_k\}$. Máme dve možnosti:

1. $f(a_{k-1})f(\overline{x}_{k+1}) < 0 \quad \Rightarrow \quad a_k = a_{k-1}, \quad b_k = \overline{x}_{k+1} = x_{k+1}$ a keďže $a_k = a_{k-1} \in \{x_k, x_{s(k)}\}$ a $f(a_k)f(x_{k+1}) < 0$ dostávame $a_k = x_{s(k+1)}$.
2. $f(\overline{x}_{k+1})f(b_{k-1}) < 0 \quad \Rightarrow \quad a_k = \overline{x}_{k+1} = x_{k+1}, \quad b_k = b_{k-1}$ a keďže $b_k = b_{k-1} \in \{x_k, x_{s(k)}\}$ a $f(b_k)f(x_{k+1}) < 0$ dostávame $b_k = x_{s(k+1)}$.

Dôkaz indukciou je hotový.

Bez ohľadu na znamienka hodnôt $f(a_k)$ a $f(b_k)$ je posledný výraz pre výpočet $\overline{x}_{k+2}$ konvexnou kombináciou bodov a_k a b_k. Preto pre každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$. To znamená, že postupnosť $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ je neklesajúca a postupnosť $\{b_k\}_{k=0}^\infty$ je nerastúca a navyše sú obidve ohraničené, lebo $\{a_k\}_{k=0}^\infty$, $\{b_k\}_{k=0}^\infty \subseteq [a, b]$. Existujú teda limity $\lim_{n\to\infty} a_n = \overline{a}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = \overline{b}$. Vzhľadom k tomu, že $x_{k+1} \in \{a_k, b_k\}$ pre každé $k \in \mathbb{N}_0$, stačí dokázať implikáciu: ak $\overline{a} < \overline{b}$, potom od istého indexu platí buď $x_{k+1} = a_k$ alebo $x_{k+1} = b_k$. Ak by totiž platilo $\overline{a} = \overline{b}$, potom by zrejme k tejto spoločnej hodnote konvergovala aj postupnosť $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ a navyše $\overline{a} = \overline{b}$ by bol koreňom funkcie f: Fakt, že pre každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí $f(a_k)f(b_k) < 0$ implikuje $\lim_{k\to\infty} f(a_k)f(b_k) \leq 0$. Avšak

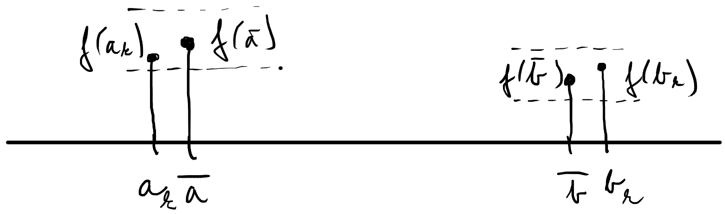
$$0 \geq \lim_{k\to\infty} f(a_k)f(b_k) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \cdot \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} a_k\right) f\left(\lim_{k\to\infty} b_k\right) = f(\overline{a})f(\overline{b}) = f(\overline{a})^2,$$

takže $f(\overline{a}) = 0$ a $\overline{a}$ je koreňom funkcie f.

Venujme sa nasledujúcim špeciálnym prípadom:

1. $f(\overline{a}), f(\overline{b}) \neq 0$

   (a) $f(\overline{a})f(\overline{b}) > 0$ nie je možné, pretože v takom prípade by vďaka spojitosti funkcie f pre dostatočne veľké k mali rovnaké znamienka aj hodnoty $f(a_k)$ a $f(b_k)$, čo je v spore s faktom, že $f(a_k)f(b_k) < 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}_0$.



   (b) $f(\overline{a})f(\overline{b}) < 0$ znamená, že

$$\frac{f(\overline{a})}{f(\overline{a}) - f(\overline{b})}, -\frac{f(\overline{b})}{f(\overline{a}) - f(\overline{b})} \in (0, 1),$$

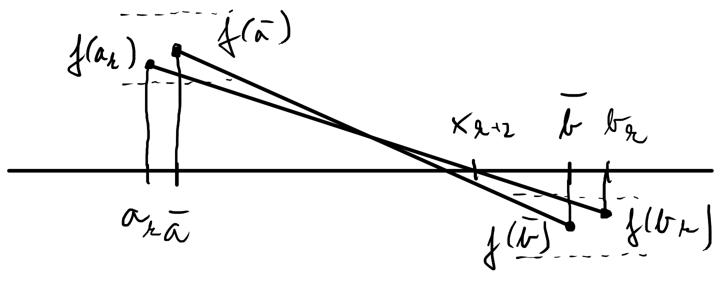
   čo implikuje

$$\overline{a} < \frac{f(\overline{a})}{f(\overline{a}) - f(\overline{b})}\overline{b} - \frac{f(\overline{b})}{f(\overline{a}) - f(\overline{b})}\overline{a} < \overline{b}.$$

   Keďže výraz medzi uvedenými nerovnosťami je spojitou funkciou premenných $\overline{a}$ a $\overline{b}$ (v okolí týchto hodnôt), pre dostatočne veľké k platí

$$\overline{a} < \frac{f(a_k)}{f(a_k) - f(b_k)}b_k - \frac{f(b_k)}{f(a_k) - f(b_k)}a_k < \overline{b}.$$

   To by však znamenalo buď $\overline{x}_{k+2} = a_{k+1} > \overline{a}$ alebo $\overline{x}_{k+2} = b_{k+1} < \overline{b}$, čo v obidvoch prípadoch vedie k sporu s monotónnosťou postupností $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ a $\{b_n\}_{n=0}^\infty$.



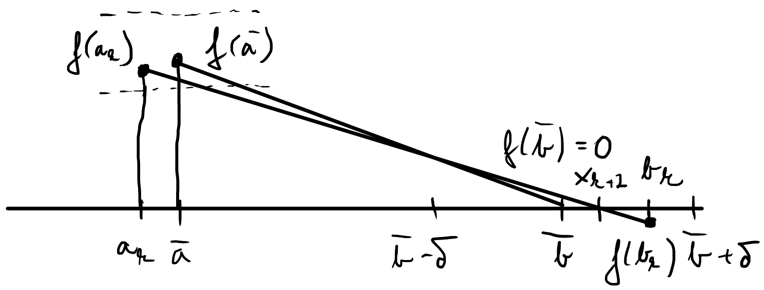
2. Práve jedna z funkčných hodnôt $f(\overline{a})$ a $f(\overline{b})$ je nulová, pre určitosť povedzme, že $f(\overline{a}) \neq 0$ a $f(\overline{b}) = 0$. Zvoľme $\delta > 0$ tak, aby $\overline{a} < \overline{b} - \delta$. Keďže platí

$$\overline{b} = \frac{f(\overline{a})}{f(\overline{a}) - f(\overline{b})}\overline{b} - \frac{f(\overline{b})}{f(\overline{a}) - f(\overline{b})}\overline{a} \tag{1}$$

a pravá strana rovnosti je opäť spojitou funkciou premenných $\overline{a}$ a $\overline{b}$ (v okolí týchto hodnôt), pre dostatočne veľké k platí

$$x_{k+2} = \overline{x}_{k+2} = \frac{f(a_k)}{f(a_k) - f(b_k)}b_k - \frac{f(b_k)}{f(a_k) - f(b_k)}a_k \in (\overline{b} - \delta, \overline{b} + \delta).$$

Podobne ako v predošlom prípade by sa ukázalo, že vyššie uvedené hodnoty nemôžu ležať v intervale $(\overline{b} - \delta, \overline{b}) \subseteq (\overline{a}, \overline{b})$, a preto platí $x_{k+2} \in [\overline{b}, \overline{b} + \delta)$. To však znamená, že pre dostatočne veľké k platí $x_{k+2} = b_{k+1}$ a teda postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje ku koreňu funkcie f.



3. $f(\overline{a}), f(\overline{b}) = 0$. Pre spor predpokladajme, že existuje nekonečne veľa indexov k s vlastnosťou $x_{k+1} = a_k$ a zároveň existuje nekonečne veľa indexov k s vlastnosťou $x_{k+1} = b_k$. Uveďme v stručnosti myšlienku, ktorá sa skrýva za nasledujúcimi riadkami. Náš predpoklad implikuje, že postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ osciluje medzi hodnotami $\overline{a}$ a $\overline{b}$. Inými slovami, dôjde k nekonečnému počtu skokov medzi hodnotami blízkymi $\overline{a}$ a $\overline{b}$. Naším cieľom je ukázať, že vždy, keď nastane tento skok, musí byť funkčná hodnota v bode x_k dostatočne veľká v absolútnej hodnote. To by znamenalo, že existuje podpostupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ($\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$) taká, že $f(a_{n_k}) \nrightarrow 0$ ($f(b_{n_k}) \nrightarrow 0$), čo je v spore so spojitosťou funkcie f. Kľúčovým argumentom bude fakt, že prvky x_{k+1} sú konvexnými kombináciami prvkov a_{k-1} a b_{k-1}.

Zvoľme $\delta > 0$ tak, aby $\delta < (\overline{b} - \overline{a})/2$. Nech $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ je postupnosť tvorená tými x_n pre $n \in \mathbb{N}_0$, pre ktoré platí buď $x_{n+1} > \overline{b}$ a zároveň $x_n < \overline{a}$, alebo $x_{n+1} < \overline{a}$ a zároveň $x_n > \overline{b}$. Navyše predpokladajme, že postupnosť indexov $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ začína tým indexom, od ktorého platí $a_\ell \in (\overline{a} - \delta)$ a $b_\ell \in (\overline{b} + \delta)$, pre všetky $\ell \geq n_k - 1$.

Najprv si odvoďme nejaké pomocné tvrdenia vyplývajúce z vlastností konvexných kombinácii. Zvoľme ľubovoľne $c, d \in (0, 1)$ také, že $c + d = 1$ a $x \in (\overline{a} - \delta, \overline{a})$ a $y \in (\overline{b}, \overline{b} + \delta)$. Odvoďme nutnú podmienku pre to, aby platila nerovnosť $\overline{b} < cx + dy$. Keďže

$$\overline{b} < cx + dy \Rightarrow c\overline{b} + d\overline{b} < cx + dy \Rightarrow c(\overline{b} - x) < d(y - \overline{b}) \Rightarrow \frac{\overline{b} - x}{y - \overline{b}} < \frac{d}{c}$$

a zároveň

$$\overline{b} - x > \overline{b} - \overline{a} > \frac{\overline{b} - \overline{a}}{2} > \delta > y - \overline{b},$$

dostávame

$$\overline{b} < cx + dy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\overline{b} - x}{y - \overline{b}} < \frac{d}{c} \qquad \Rightarrow \qquad 1 < \frac{d}{c} \qquad \Rightarrow \qquad c < d.$$

Podobne by sa dala ukázať implikácia

$$cx + dy < \overline{a} \qquad \Rightarrow \qquad d < c.$$

Vráťme sa k našej postupnosti $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$. Pre každé $k \in \mathbb{N}_0$ môže nastať jedna z dvoch nasledujúcich možností:

(a) $x_{n_k} < \overline{a}$, $x_{n_k+1} > \overline{b}$. Keďže platí

$$x_{n_k+1} = \frac{f(a_{n_k-1})}{f(a_{n_k-1}) - f(b_{n_k-1})} b_{n_k-1} - \frac{f(b_{n_k-1})}{f(a_{n_k-1}) - f(b_{n_k-1})} a_{n_k-1},$$

podľa analýzy z predošlého odstavca dostávame nerovnosť

$$\frac{f(a_{n_k-1})}{f(a_{n_k-1}) - f(b_{n_k-1})} > -\frac{f(b_{n_k-1})}{f(a_{n_k-1}) - f(b_{n_k-1})}.$$

Bez ohľadu na znamienka funkčných hodnôt sa dá odvodiť nasledujúca nerovnosť: $|f(a_{n_k-1})| > |f(b_{n_k-1})|$

(b) $x_{n_k} > \overline{b}$, $x_{n_k+1} < \overline{a}$. Podobne ako v predošlom prípade by sa dala odvodiť nerovnosť $|f(a_{n_k-1})| < |f(b_{n_k-1})|$.

Pokračujme v analýze týchto dvoch prípadov:

(a) $x_{n_k} < \overline{a}$, $x_{n_k+1} > \overline{b}$. Tento predpoklad a definícia postupnosti $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ implikuje nerovnosť $x_{n_{k+1}} > \overline{b}$, $x_{n_{k+1}+1} < \overline{a}$. Podľa vyššie dokázaného platia nasledujúce nerovnosti:

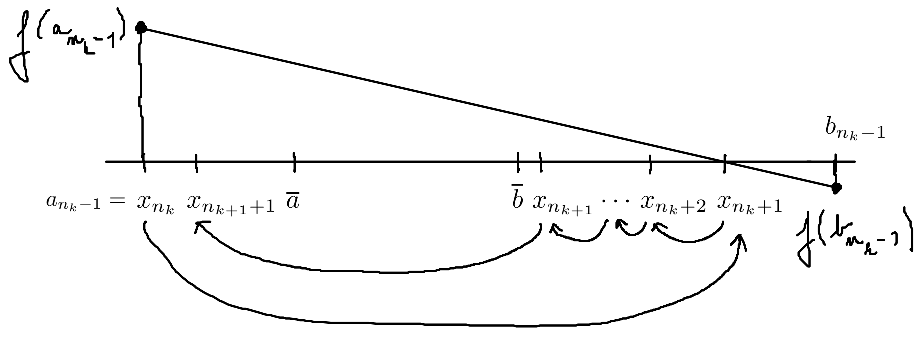
$$|f(a_{n_k-1})| > |f(b_{n_k-1})|, \qquad \left|f(a_{n_{k+1}-1})\right| < \left|f(b_{n_{k+1}-1})\right|$$

Ďalej ukážeme, že platí $a_{n_k-1} = a_{n_{k+1}-1}$. Rovnosti

$$\{x_{n_k}, x_{s(n_k)}\} = \{a_{n_k-1}, b_{n_k-1}\}, \qquad \{x_{n_{k+1}}, x_{s(n_{k+1})}\} = \{a_{n_{k+1}-1}, b_{n_{k+1}-1}\}$$

spolu s našimi predpokladmi implikujú $x_{n_k} = a_{n_k-1}$ a $x_{n_{k+1}} = b_{n_{k+1}-1}$. V dôsledku toho tiež platí $x_{s(n_{k+1})} = a_{n_{k+1}-1}$, čo znamená, že nám stačí dokázať rovnosť $x_{s(n_{k+1})} = x_{n_k}$, teda $s(n_{k+1}) = n_k$. Vzhľadom k tomu, že $x_{n_k+1}, \ldots, x_{n_{k+1}} > \overline{b}$, musia mať všetky funkčné hodnoty v týchto bodoch rovnaké znamienko. Zároveň, znamienka funkčných hodnôt v bodoch $a_{n_k-1} = x_{n_k}$ a x_{n_k+1} sú rôzne (v opačnom prípade by nastal spor s priebehom metódy). V konečnom dôsledku sú znamienka funkčných hodnôt v bodoch x_{n_k} a $x_{n_{k+1}}$ rôzne a n_k je najväčší index menší ako n_{k+1} s touto vlastnosťou. Dopracovali sme sa k nasledujúcemu reťazcu nerovností:

$$|f(b_{n_k-1})| < |f(a_{n_k-1})| < \left|f(b_{n_{k+1}-1})\right|.$$



(b) $x_{n_k} > \overline{b}$, $x_{n_k+1} < \overline{a}$. Tento prípad by sa dal študovať rovnakým spôsobom ako ten predošlý obdržiac nasledujúce výsledky: $b_{n_k-1} = b_{n_{k+1}-1}$ a

$$|f(a_{n_k-1})| < |f(b_{n_k-1})| < \left|f(a_{n_{k+1}-1})\right| .$$

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $x_{n_0} < \overline{a}$. Práve sme dokázali platnosť nasledujúceho reťazca nerovností:

$$|f(b_{n_0-1})| < |f(a_{n_0-1})| < |f(b_{n_1-1})| < |f(a_{n_2-1})| < |f(b_{n_3-1})| < |f(a_{n_4-1})| < \cdots .$$

To znamená, že v postupnostiach $\{f(a_n)\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{f(b_n)\}_{n=0}^{\infty}$ sa nachádzajú podpostupnosti, ktoré sú v absolútnej hodnote zdola ohraničené hodnotou $|f(b_{n_0-1})| \neq 0$, čo je v spore s faktom $f(a_n) \to 0$ a $f(b_n) \to 0$.

$\square$