Cvičení k předmětu
M4180 Numerické metody I

Jaro 2020

Obsah

Aktualizace dne: 10. května 2020

1 Osnova cvičení

1. cvičení (17. – 23. února 2020)

- Organizační pokyny
- Chyba v numerických výpočtech (odhad primární chyby)
- Podmíněnost úloh, šíření chyb
- symbolika O,o

2. cvičení (24. února – 1. března 2020)

- Metoda bisekce
- Metoda prosté iterace

3. cvičení (2. – 8. března 2020)

- Vhodný tvar iterační funkce
- Přitahující a odpuzující pevné body
- Řád konvergence

4. cvičení (9. – 15. března 2020)

- Newtonova metoda
- Neřešené příklady 1

5. cvičení (16. – 22. března 2020)

- Metoda sečen
- Metoda regula falsi
- Quasi–Newtonova metoda
- Neřešené příklady 2, 3, 4, 5

6. cvičení (23. – 29. března 2020)

- Urychlení konvergence
- Steffensenova metoda
- Newtonova metoda pro násobné kořeny
- Neřešené příklady 6, 7, 8

7. cvičení (30. března – 5. dubna 2020)

- Hornerovo schéma
- Hranice kořenů polynomů
- Sturmova posloupnost a Sturmova věta
- Neřešené příklady 9, 10

8. cvičení (6. – 12. dubna 2020)

- Zdvojená Newtonova metoda
- Newtonova–Maehlyova metoda
- Zopakovat výpočet vlastních čísel matice
- Neřešené příklady 11, 12

9. cvičení (13. – 19. dubna 2020)

10. cvičení (20. – 26. dubna 2020)

- Iterační metody řešení systému lineárních rovnic
- Jacobiho metoda
- Gaussova–Seidelova metoda
- Neřešené příklady 13, 14

11. cvičení (27. dubna – 3. května 2020) text

- Newtonova metoda pro řešení systémů nelineárních rovnic pomocí
- Přímé metody řešení systému lineárních rovnic
- Neřešené příklady 15, 16

12. cvičení (4. – 10. května 2020)

- Choleského rozklad
- Croutova metoda
- Neřešené příklady 17, 18

13. cvičení (11. – 17. května 2020)

2 Řešené příklady

Newtonova metóda

Pri použití prostej iteračnej metódy sme sa mohli presvedčiť o tom, že nájsť vhodnú iteračnú funkciu nemusí byť priamočiare a jednoduché. Z analýzy vieme, že v prípade niektorých funkcií môžeme pre výpočet približných funkčných hodnôt použiť Taylorov polynóm. Myšlienka Newtonovej metódy spočíva v opakovanom použití aproximácie Taylorovým polynómom prvého rádu v blízkosti koreňa. Predpokladajme, že bod x_0 sa nachádza v blízkosti koreňa ξ funkcie f. Taylorov polynóm $T_1(x)$ prvého rádu funkcie f v bode x_0 má nasledujúci tvar:

$$y = T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

V skutočnosti sa jedná o priamku, ktorá je dotyčnicou ku grafu funkcie f v bode x_0. Taylorov polynóm dobre aproximuje funkciu f v blízkosti bodu x_0. To znamená, že ak x_0 je blízko bodu ξ, potom aj koreň $T_1(x)$ bude blízko ξ. Preto má zmysel zvoliť x_1 tak, aby bol tento bod koreňom $T_1(x)$, teda aby platilo:

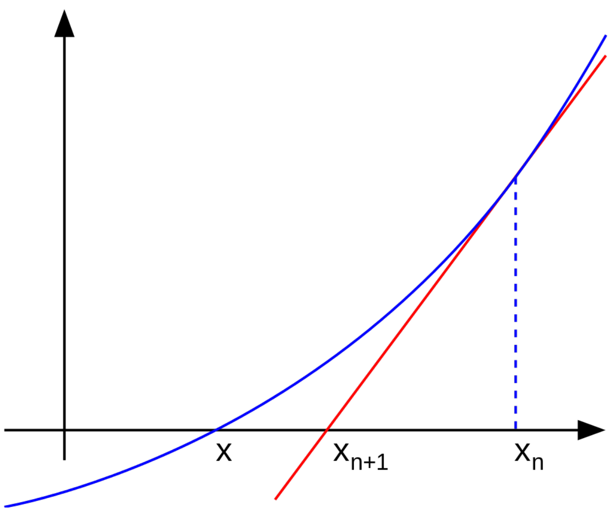
$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Odtiaľto vyjadríme x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Bod x_1 je ďalším odhadom koreňa ξ, takže celý postup môžeme opakovať, čo nás privádza k Newtonovej metóde:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$



Obrázek 1: zdroj:wikipedie

Aktualizace dne: 10. května 2020

Špeciálne, tvar hľadanej iteračnej funkcie je:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Samozrejme, aby táto postupnosť konvergovala, a aby vôbec bola definovaná, musí mať funkcia f vhodné vlastnosti. V prvom rade potrebujeme, aby $f'(x)$ bola nenulová na nejakom okolí bodu ξ. Monotónnu konvergenciu nám zaručia tzv. Fourierove podmienky:

- $f \in C^2[a,b]$ a f má v intervale $[a,b]$ (jediný)[1] koreň ξ,
- f', f'' nemenia znamienko na intervale $[a,b]$, špeciálne $\forall x \in [a,b]$ platí $f'(x) \neq 0$,
- pre počiatočnú aproximáciu x_0 platí, že znamienko $f(x_0)$ je rovnaké ako znamienko f'' na intervale $[a,b]$.

Jednoducho povedané, stačí nám, aby funkcia f bola monotónna a buď konvexná alebo konkávna na $[a,b]$. Potom si človek musí dať pozor už len na to, či počiatočnú aproximáciu volí naľavo alebo napravo od koreňa ξ. Pri zlej voľbe metóda nemusí konvergovať.

Výhodou Newtonovej metódy je, že generuje postupnosť, ktorej rád konvergencie je 2.

[1]Nasledujúca podmienka zaručí, že v uvažovanom intervale je nanajvýš jeden koreň.

Příklad 1. *Nájdite kladný koreň rovnice* $f(x) = x^2 + \sin(x) - 2 = 0$.

Najprv si spočítajme potrebné derivácie:

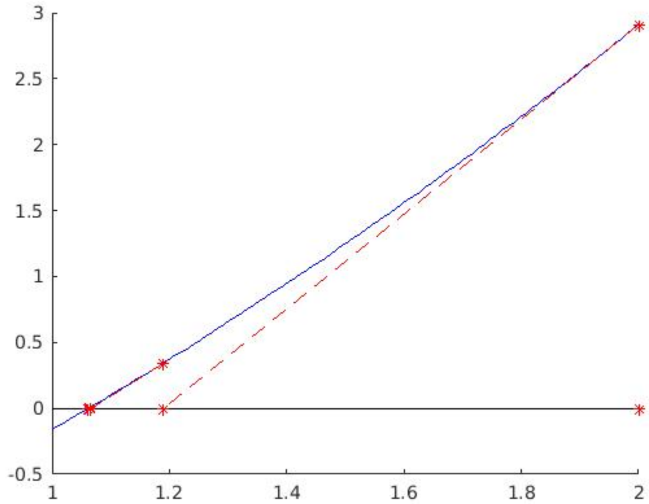
$$f'(x) = 2x + \cos(x), \qquad f''(x) = 2 - \sin(x).$$

Evidentne, všetky funkcie sú spojité na celom $\mathbb{R}$. *Tiež platí, že* $f(1) = \sin(1) - 1 < 0$ *a* $f(2) = 2 + \sin(2) > 0$, *preto má* f *v intervale* $[1, 2]$ *aspoň jeden koreň* ξ. *Keďže* $|\cos| \leq 1$ *a* $|\sin| \leq 1$, *na intervale* $[1, 2]$ *tiež platí* $f' > 0$ *a* $f'' > 0$. *Voľbou* $x_0 = 2$ *zaručíme splnenie aj poslednej Fourierovej podmienky. Funkcia* g *má v našom prípade tvar:*

$$g(x) = x - \frac{x^2 + \sin(x) - 2}{2x + \cos(x)}.$$

Môžeme počítať:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\\
x_1 &= 1,188220807567148\\
x_2 &= 1,064727906526682\\
x_3 &= 1,061551949628386\\
x_4 &= 1,061549774632405\\
x_5 &= 1,061549774631384\ldots
\end{aligned}$$



Příklad 2. *Nájdite najväčší záporný koreň rovnice* $f(x) = 2\sin(x - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}x + 1$.

Prvá a druhá derivácia funkcie f *majú tvar:*

$$f'(x) = 2\cos\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}, \qquad f''(x) = -2\sin\left(x - \frac{1}{4}\right).$$

Opäť, všetky tri funkcie f, f' a f'' sú spojité na celom $\mathbb{R}$, takže sú tiež spojité na akomkoľvek podintervale $\mathbb{R}$. Spočítajme niektoré funkčné hodnoty:

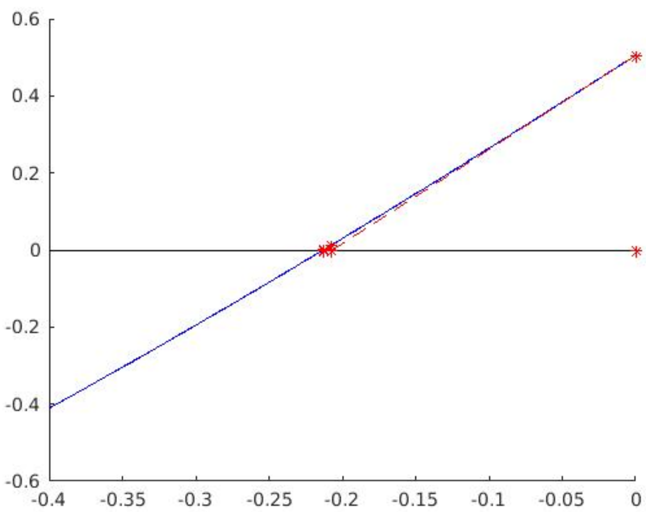
$$f(0) = 2\sin\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 > 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2} > 0,$$
$$f(-1) = 2\sin\left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{1}{2} < 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = -\sqrt{2} + \frac{1}{2} < 0.$$

Funkcia f má v intervale $[-1,0]$ aspoň jeden koreň ξ. Vyšetrime znamienka prvej a druhej derivácie. Ak $x \in [-1,0]$, potom $x - \frac{1}{4} \in [-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}] \subset [-\pi, 0]$. Preto je funkcia $\cos(x - \frac{1}{4})$ rastúca na intervale $[-1,0]$ a tým pádom aj funkcia $f'(x)$. V ľavom krajnom bode platí:

$$f'(-1) = 2\cos\left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{1}{2} > 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

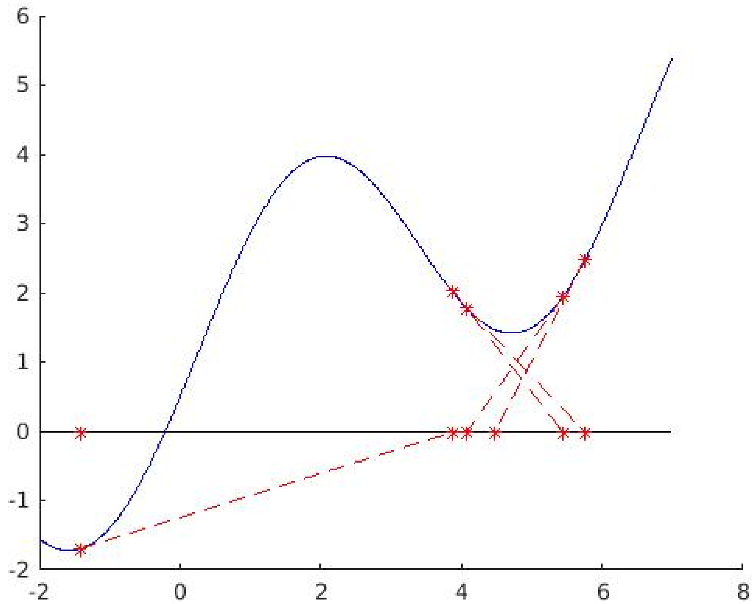
Zistili sme, že na intervale $[-1,0]$ je funkcia $f'(x)$ kladná. Keďže funkcia $\sin$ je v intervale $(-\pi,0)$ záporná, je funkcia $f''(x)$ na intervale $[-1,0]$ kladná. Za počiatočnú aproximáciu môžeme zvoliť napríklad $x_0 = 0$. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0\\
x_1 &= -0,207230672398087\\
x_2 &= -0,213094450937999\\
x_3 &= -0,213101107654045\\
x_4 &= -0,213101107662691\\
x_5 &= -0,213101107662692\ldots
\end{aligned}$$



Pozrime sa na to, čo sa môže stať v prípade, keď počiatočnú aproximáciu nezvolíme v súlade s Fourierovými podmienkami. Ľahko sa môžeme presvedčiť o tom, že skúmaná funkcia f spĺňa všetky na ňu kladené podmienky aj na intervale $[-\frac{3}{2}, 0]$. Takto by to dopadlo, keby sme za počiatočnú aproximáciu zvolili napríklad $x_0 = -1,41$:

$$\begin{aligned} x_0 &= -1,41 \\ x_1 &= 3,863132948935251 \\ x_2 &= 5,441494800941664 \\ x_3 &= 4,073020017434738 \\ x_4 &= 5,759740929476607 \\ x_5 &= 4,474064870902095\ldots \end{aligned}$$



Vidíme, že v takejto situácii sa môže ďalšia aproximácia od hľadaného koreňa vzdialiť a premiestniť do oblasti, kde má funkcia iné vlastnosti. Špeciálne, nablízku nemusí byť žiadny koreň.

Metoda sečen

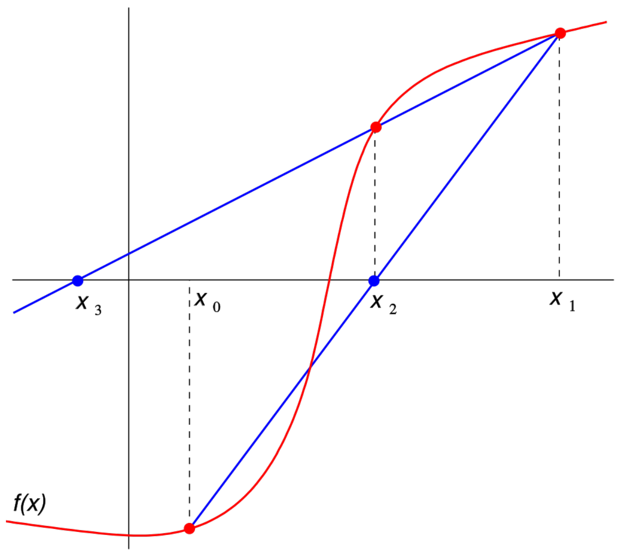
Nevýhodou Newtonovy metody je fakt, že v každém iteračním kroku je nutné počítat hodnotu funkce $f(x_k)$ i její derivace $f'(x_k)$. Někdy je však výpočet derivace náročný a je vhodné hodnotu derivace v daném bodě aproximovat. Geometricky se jedná o nahrazení tečny (v případě Newtonovy metody) sečnou. Matematické vyjádření aproximace je následující:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Nahrazením derivace v Newtonově metodě touto aproximací získáme iterační posloupnost ve tvaru:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Další iteraci získáme vždy z předchozích dvou iterací (jedná se tedy o dvoukrokovou metodu) jako průsečík sečny procházející body $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ a $[x_k, f(x_k)]$ a osy x.



Obrázek 2: zdroj:wikipedie

Co je třeba ověřit a kdy bude posloupnost konvergovat k přesnému kořenu funkce? Postačující podmínkou konvergence je, že je funkce f spojitá, má na daném intervalu právě jeden kořen a počáteční aproximace jsou dostatečně blízko hledaného bodu. K získání počátečních aproximací, které jsou dostatečně blízko hledaného kořene lze využít např. metody bisekce.

Příklad 3. *Pomocí metody sečen najděte kořen funkce* $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$ *na intervalu* $[2, 3]$.

Funkce $f(x)$ *je zřejmě spojitá. Navíc platí* $f(2) = -5$ *a* $f(3) = 4$, *a tedy funkce má na intervalu aspoň jeden kořen. Derivace funkce je* $f'(x) = 3x^2 - 4x$, *což je na daném intervalu kladná funkce. Tedy funkce* f *je rostoucí na daném intervalu a má v něm právě jeden kořen.*

Jako počáteční aproximace zvolíme krajní body intervalu a další iterace počítáme podle daného vzorce. Získáme posloupnost

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= 3 \\
x_2 &= \frac{23}{9} \doteq 2,5556 \\
x_3 &\doteq 2,6991 \\
x_4 &\doteq 2,6924 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

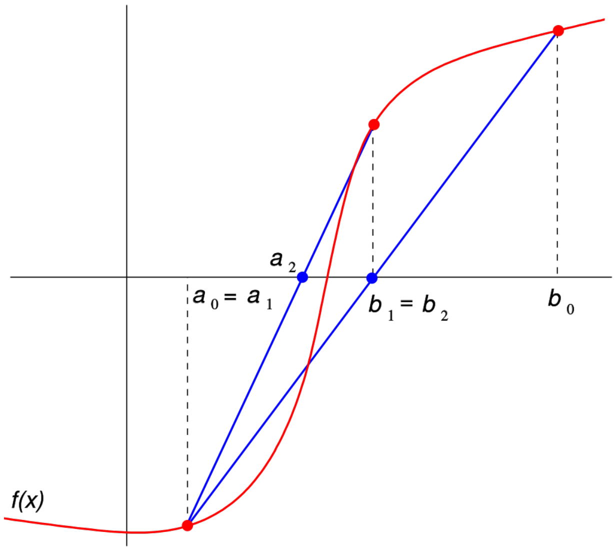
Metoda regula falsi

Princip je podobný jako u metody sečen s tím rozdílem, že vždy chceme zajistit, aby kořen ležel mezi dvěma použitými iteracemi. Tato metoda při splnění podmínek vždy konverguje podobně jako metoda bisekce. Rozdíl je v tom, že interval v každém kroku nepůlíme, ale rozdělujeme v určitém poměru, který je daný sečnou proloženou krajními body intervalu.

Iterační posloupnost získáme následovně:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_s}{f(x_k) - f(x_s)} f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $s = s(k)$ je největší index takový, že $f(x_k)f(x_s) < 0$.



Obrázek 3: zdroj:wikipedie

Co je třeba ověřit a kdy bude posloupnost konvergovat k přesnému kořenu funkce? Postačující podmínkou konvergence je, že je funkce f spojitá a má na daném intervalu právě jeden kořen. V takovém případě je metoda konvergentní pro libovolné počáteční aproximace splňující $x_0, x_1 \in [a, b]$, $f(x_0)f(x_1) < 0$,.

Příklad 4. *Pomocí metody regula falsi najděte kořen funkce $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ na intervalu $[-1, 0]$.*

Funkce $f(x)$ je zřejmě spojitá. Navíc platí $f(-1) = -1$ a $f(0) = 1$ a tedy funkce má na intervalu aspoň jeden kořen. Derivace funkce je $f'(x) = 3x^2 - 2x$, což je na daném intervalu kladná funkce. Tedy funkce f je rostoucí na daném intervalu a má v něm právě jeden kořen.

Jako počáteční aproximace zvolíme krajní body intervalu, tj. $x_0 = -1$ a $x_1 = 1$. Vzhledem k tomu, že nyní $k = 1$, zřejmě $s = 0$ a

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) = -0,5.$$

Spočítáme funkční hodnotu v této iteraci a zjistíme $f(-0,5) > 0$, *tedy pro další iteraci budeme vybírat největší index, pro který je funkční hodnota záporná, což je* $s = 0$. *Podobně jako u metody bisekce můžeme nyní zúžit interval na* $[-1; -0,5]$. *Další iterace je*

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_0}{f(x_2) - f(x_0)} f(x_2) = -\frac{9}{13} \approx -0,6923.$$

Opět zjistíme znaménko funkční hodnoty v dané iteraci, tj. $f(x_3) > 0$. *Opět nejvyšší index záporné funkční hodnoty je* $s = 0$.

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 - x_0}{f(x_3) - f(x_0)} f(x_3) \approx -0,7412.$$

Celý proces opakujeme do požadované přesnosti.

Získáme posloupnost

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{9}{13} \doteq -0,6923 \\ x_3 &\doteq -0,7412 \\ x_4 &\doteq -0,7520 \\ x_5 &\doteq -0,7543 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Na tomto příkladu jsme si mohli všimnout, že index s zůstával pořád stejný, tedy jeden krajní bod intervalu zůstával fixní a měnil se pouze druhý. To neplatí vždy, ale pouze tehdy, když funkce nemá na daném intervalu inflexní bod, tedy když druhá derivace nemění znaménko. V takovém případě je fixním bodem ten krajní bod, jehož funkční hodnota má stejné znaménko jako je znaménko druhé derivace.

V předchozím příkladu je $f''(x) = 6x - 2$ a je na daném intervalu vždy záporná. Proto pro všechny iterace platí $x_s = -1$.

Quasi–Newtonova metoda

Předchozí metody (metoda sečen a regula falsi) mají nevýhodu v tom, že se jedná o dvoukrokové metody. Tedy pro výpočet následující iterace musíme znát dvě předchozí iterace. Quasi–Newtonova metoda tento problém řeší. Geometricky opět budeme konstruovat sečnu. Jeden bod je jasný, a to $[x_k, f(x_k)]$. Druhý bod bychom chtěli získat tak, aby byl v každém kroku blíž a blíž prvnímu bodu. S výhodou lze tedy použít funkční hodnotu $f(x_k)$, která by měla konvergovat k nule v případě, že iterační posloupnost konverguje ke kořenu funkce. Z bodu x_k se tedy posuneme o $f(x_k)$. Můžeme se posouvat doprava nebo doleva, podle toho, zda budeme funkční hodnotu přičítat nebo odečítat. Vzniknou tak dvě možnosti předpisu iterační posloupnosti. V některých případech lze použít obě varianty, v některých případech je nutné vybrat variantu s $+$ nebo $-$ dle zadané funkce.

V quasi-Newtonově metodě tedy derivaci aproximujeme jako

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}{x_k - (x_k \pm f(x_k))} = \frac{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}{\mp f(x_k)}.$$

Geometricky konstruujeme sečnu v bodech $[x_k, f(x_k)]$ a $[x_k \pm f(x_k), f(x_k \pm f(x_k))]$ (dle zvolené varianty s $+$ nebo $-$).

Iterační posloupnost bude ve tvaru:

$$x_{k+1} = x_k \pm \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

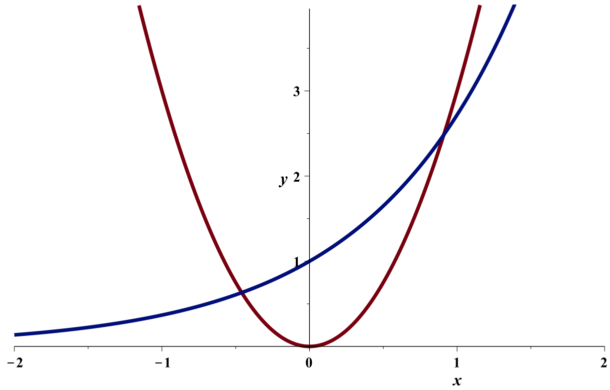
Co je třeba ověřit a kdy bude posloupnost konvergovat k přesnému kořenu funkce? Postačující podmínkou konvergence je, že je funkce f spojitá, má na daném intervalu právě jeden kořen a počáteční aproximace je dostatečně blízko hledanému kořenu.

Příklad 5. *Pomocí quasi–Newtonovy metody najděte kladný kořen funkce*

$$f(x) = 3x^2 - \mathrm{e}^x.$$

Funkce $f(x)$ je zřejmě spojitá. Pro lepší grafickou prezentaci můžeme problém hledání kořenu funkce f převést na hledání průsečíku funkcí $3x^2$ a e^x.

Na obrázku vidíme, že funkce f bude mít dva kořeny a kladný kořen je právě jeden ležící v intervalu $[0, 1]$. Pro ilustraci zvolme jako počáteční aproximaci $x_0 = 0$, přičemž $f(x_0) = -1$. Nyní je třeba zvolit variantu quasi–Newtonovy metody. Vybíráme, zda jako druhý bod pro sečnu volit $x_0 - f(x_0) = 1$, nebo $x_0 + f(x_0) = -1$. Chceme-li hledat kladný kořen, je jasné, že musíme volit variantu s $-$, jinak bychom zřejmě konvergovali k druhému kořenu.



Obrázek 4

Získáme posloupnost

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= x_0 - \frac{f^2(x_0)}{f(x_0) - f(x_0 - f(x_0))} \doteq 0,7802 \\
x_2 &\doteq 0,8939 \\
x_3 &\doteq 0,9097 \\
x_4 &\doteq 0,9100 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Urychlení konvergence

V případě, že máme konvergentní posloupnost, která konverguje pomalu, může nás napadnout otázka, jak urychlit konvergenci, tj. nahradit tuto posloupnost novou posloupností, která bude konvergovat ke stejnému bodu, ale rychleji. K tomu slouží tzv. Aitkenova Δ^2-metoda. Poznamenejme, že nyní nemluvíme pouze o iteračních posloupnostech, ale obecně o posloupnostech.

Novou posloupnost získáme jako

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta x_{k+1} - \Delta x_k} = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k},$$

kde $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ a $\Delta^2 x_k = \Delta(\Delta x_k) = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k$. Odtud také název metody.

Příklad 6. *Pomocí Aitkenovy Δ^2-metody najděte součet geometrické řady $\sum_{k=1}^{\infty} 0,99^k$.*

Z teorie posloupností víme, že součet geometrické řady je limitou posloupnosti částečných součtů, tato limita je konvergentní v případě, že $|q| < 1$. V našem případě je $q = 0,99$. Podívejme se na prvních několik členů posloupnosti:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0,99 \\
s_2 &= 0,99 + 0,99^2 = 1,9701 \\
s_3 &= 0,99 + 0,99^2 + 0,99^3 \doteq 2,940399 \\
s_4 &= 0,99 + 0,99^2 + 0,99^3 + 0,99^4 \doteq 3,90099501 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Limita této posloupnosti je $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{0,99}{1-0,99} = 99$. Vidíme, že posloupnost částečných součtů konverguje velmi pomalu. Pro zrychlení konvergence použijeme Aitkenovu Δ^2-metodu. Sestrojíme novou posloupnost

$$\begin{aligned}
\hat{s}_1 &= s_1 - \frac{(s_2 - s_1)^2}{s_3 - 2s_2 + s_1} = 99 \\
\hat{s}_2 &= s_2 - \frac{(s_3 - s_2)^2}{s_4 - 2s_3 + s_2} = 99 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vidíme, že nově získaná posloupnost hned v prvním kroku dokonvergovala do hledaného bodu.

Steffensenova metoda

Tato metoda je aplikací Aitkenovy Δ^2-metody pro iterační proces $x_{k+1} = g(x_k)$. Předpokládejme, že máme počáteční aproximaci x_0 a následné dva kroky, tj. $x_1 = g(x_0)$ a $x_2 = g(x_1) = g(g(x_0))$ První člen nové posloupnosti bychom získali ve tvaru

$$\hat{x}_0 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}.$$

Tento bod pak nastavíme jako nový počáteční bod pro iterační proces a celý postup zopakujeme. Pro zjednodušení zápisu zavedeme nové značení: $y_k = g(x_k)$ a $z_k = g(y_k) = g(g(x_k))$. Předchozí krok tedy můžeme zapsat jako

$$\hat{x}_0 = x_0 - \frac{(y_0 - x_0)^2}{z_0 - 2y_0 + x_0}.$$

Následující člen iteračního procesu tak bude $x_1 = \hat{x}_0$. Obecně tedy

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}.$$

Poznamenejme navíc, že Steffensenova metoda konverguje v případě počáteční aproximace zvolené dostatečně blízko hledanému kořenu, zároveň konverguje kvadraticky a to i v případě, že $|g'(\xi)| > 1$.

Příklad 7. *Aproximujte číslo $\sqrt{3}$ pomocí Steffensenovy metody. Tento postup porovnejte s metodou prosté iterace. Jako počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 2$.*

Dané číslo je kořenem například funkce $f(x) = x^2 - 3$. Nejprve je třeba zvolit iterační funkci $g(x)$. Vyzkoušejte si různé varianty. Volbou může být např. $g(x) = \frac{3}{x}$. Iterační posloupnost pro metodu prosté iterace je

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= \frac{3}{2} \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= \frac{3}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zřejmě daná posloupnost osciluje. Můžete si zkusit ověřit podmínky konvergence metody prosté iterace.

Nyní použijme Steffensenovu metodu:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2 & y_0 &= \frac{3}{2} & z_0 &= 2\\
x_1 &= 2 - \frac{(\frac{3}{2}-2)^2}{2-2\cdot\frac{3}{2}+2} = \frac{7}{4} & y_1 &= \frac{12}{7} & z_1 &= \frac{7}{4}\\
x_2 &= \frac{7}{4} - \frac{(\frac{12}{7}-\frac{7}{4})^2}{\frac{7}{4}-2\cdot\frac{12}{7}+\frac{7}{4}} \doteq 1,73214 & y_2 &\doteq 1,73196 & z_2 &\doteq 1,73214\\
&\vdots & &\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

Můžeme vidět, že posloupnost konverguje k hledané hodnotě.

Newtonova metoda pro násobné kořeny

V případě, že hledaný kořen funkce je vícenásobný, konvergence Newtonovy metody nebude kvadratická, ale pouze lineární. Pokud známe násobnost lze metodu modifikovat, abych urychlili konvergenci následovně:

$$x_{k+1} = x_k - M\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

kde M je násobnost hledaného kořene.

V případě, že násobnost kořene neznáme, můžeme najít funkci, která má stejné kořeny jako funkce $f(x)$, ale všechny pouze násobnosti 1. Z matematické analýzy víme, že je to funkce $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Budeme tedy hledat kořen funkce $u(x)$.

Příklad 8. *Pomocí Newtonovy metody najděte kořen funkce $f(x) = (x^2-3)^4$. Jako počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 2$.*

Zřejmě hledáme kořen $\sqrt{3}$. Nejprve uvažujme klasickou Newtonovu metodu. Získáme iterační proces:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2\\
x_1 &= 1,9375\\
x_2 &\doteq 1,88886\\
x_3 &\doteq 1,85129\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Vidíme, že konvergence je pomalá. Uvažujme, že známe násobnost hledaného kořene, *tedy 4, a použijme Newtonovu metodu pro násobné kořeny. Iterační posloupnost je:*

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= 1,75 \\
x_2 &\doteq 1,73214 \\
x_3 &\doteq 1,73205 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Na závěr ještě uvažujme situaci, kdy neznáme násobnost hledaného kořene. Spočítáme si tedy funkci $u(x)$:

$$u(x) = \frac{x^2 - 3}{8x}$$

Pro tuto funkci použijeme Newtonovu metodu.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= x_0 - \frac{u(x_0)}{u'(x_0)} \doteq 1,71429 \\
x_2 &\doteq 1,73196 \\
x_3 &\doteq 1,73205 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Nyní se budeme věnovat hledání kořenů polynomů. Na polynomy lze nahlížet jako na nelineární rovnice. Lze tedy použít všechny metody, které jsme doposud uvažovali. Nyní však využijeme speciálních vlastností polynomů a ukážeme, jak nalézt kořeny polynomů výhodněji. Díky vlastnostem polynomů jsme schopni pomocí těchto numerických metod aproximovat všechny reálné kořeny polynomu. Předpokládáme polynom stupně n s reálnými koeficienty ve tvaru

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

s kořeny $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Hornerovo schéma

Zopakujte si užití Hornerova schématu pro výpočet funkční hodnoty polynomu a výpočet funkčních hodnot derivací. Na internetu je spoustu učebních materiálů, např. odkaz.

Zopakujete si také, jak lze najít kořeny v případě polynomů s celočíselnými kořeny. V neposlední řadě si zopakujte dělení polynomů.

Hranice kořenů polynomů

Na základě koeficientů daného polynomu lze nalézt hranice, mezi kterými se nachází absolutní hodnoty polynomů:

$$\begin{aligned} A &= \max\left(|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\right), \\ B &= \max\left(|a_n|, \ldots, |a_1|\right), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}} \le |\xi_k| \le 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

Příklad 9. *Najděte hranice, mezi kterými se nachází absolutní hodnoty polynomu:*

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

Nejprve spočítáme konstanty A a B:

$$\begin{aligned} A &= \max\{0, 5, 0, 4\} = 5 \\ B &= \max\{1, 0, 5, 0\} = 5 \end{aligned}$$

Hranice jsou tedy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{5}{4}} &\le |\xi_k| \le 1 + \frac{5}{1} \\ \frac{4}{9} &\le |\xi_k| \le 6 \end{aligned}$$

Sturmova posloupnost a Sturmova věta

Nyní je naším cílem zjistit počet kořenů na daném intervalu. Díky tomu budeme mimo jiné schopni odpovědět na otázky: kolik reálných kořenů má daný polynom? kolik kladných/záporných kořenů má daný polynom? kolik kořenů má polynom na intervalu $[a, b]$? Stejně tak v kombinaci s dalšími znalostmi bychom mohli být schopni separovat jednotlivé kořeny, tzn. nalézt intervaly, ve kterých leží právě jeden kořen.

Nejprve je nutné zkonstruovat tzv. Sturmovu posloupnost. Získáme ji jako

$$P_0(x) = P(x), \qquad P_1(x) = -P_0'(x)$$

P_{i+1} sestrojíme rekurentně dělením polynomu P_{i-1} polynomem P_i, tedy

$$P_{i-1} = Q_i P_i(x) - c_i P_{i+1}(x),$$

kde stupeň$P_i >$ stupeňP_{i+1} a konstanty c_i jsou kladné. Poslední polynom P_m je největší společný dělitel polynomů P a P_1.

Navíc předpokládáme, že polynom P má všechny kořeny jednoduché. Kdyby tomu tak nebylo, největší společný dělitel bude mít reálné kořeny. V takovém případě vydělíme polynom P tímto největším společným dělitelem a získáme polynom, který bude mít stejné kořeny jako polynom P, ale všechny násobnosti jedna.

Jednotlivé členy Sturmovy posloupnosti můžeme vynásobit/vydělit kladnou konstantou, aby se nám s nimi lépe pracovalo.

Sturmova věta:

Počet reálných kořenů polynomu P v intervalu $[a, b)$ je roven $W(b) - W(a)$, kde $W(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti v bodě x (z níž jsou vyškrtnuty nuly).

Poznamenejme, že ve Sturmově větě je uvažován polouzavřený interval zleva. Avšak v případě, že je krajní bod přímo kořenem daného polynomu, bude funkční hodnota prvního členu Sturmovy posloupnosti nulová. Danou větu je tedy možné použít pro různé typy intervalů.

Příklad 10. *Zjistěte počet reálných kořenů, počet kladných kořenů, počet záporných kořenů a počet kořenů na intervalech* $[-1, 1]$ *a* $[-1, 0]$ *polynomu:*

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

Nejprve sestrojíme Sturmovu posloupnost:

$$P_0(x) = P(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

Spočítáme derivaci polynomu $P'(x) = 3x^2 + 6x$. *Pro získání dalšího členu Sturmovy posloupnosti vydělíme tento polynom konstantou* 3 *(není to nutné, ale polynom si zjednodušíme).*

$$P_1(x) = -x^2 - 2x$$

Vydělíme polynom $P_0(x)$ polynomem $P_1(x)$. Výsledkem tohoto dělení je polynom $-x-1$ a zbytek $-2x-1$. Dalším členem Sturmovy posloupnosti je právě zmíněný zbytek dělení s opačným znaménkem, tj.

$$P_2(x) = 2x + 1$$

Opakujeme postup. Nyní vydělíme polynom $P_1(x)$ polynomem $P_2(x)$. Výsledkem tohoto dělení je polynom $-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ a zbytek $\frac{3}{4}$. Dalším členem Sturmovy posloupnosti je právě zmíněný zbytek dělení s opačným znaménkem, tj. $-\frac{3}{4}$. Zde nám jde hlavně o znaménko, můžeme podělit kladnou konstantou, tedy

$$P_3(x) = -1$$

Pokud bychom znovu postup opakovali, zřejmě při dalším dělení by byl zbytek 0. Polynom $P_3(x)$ je tedy posledním prvkem Sturmovy posloupnosti. Navíc vidíme, že největší společný dělitel polynomu P a jeho derivace je konstanta, tzn. polynom P a P' nemají společné kořeny a tedy P má všechny kořeny jednoduché. Celou posloupnost shrňme:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 + 3x^2 - 1 \\ P_1(x) &= -x^2 - 2x \\ P_2(x) &= 2x + 1 \\ P_3(x) &= -1 \end{aligned}$$

Nyní bychom chtěli využít Sturmovu větu, proto potřebujeme spočítat počty znaménkových změn v jednotlivých krajních bodech daných intervalů. Poznamenejme, že počet reálných kořenů odpovídá intervalu $(-\infty, \infty)$, počet kladných kořenů intervalu $(0, \infty)$ a počet záporných kořenů intervalu $(-\infty, 0)$. Do následující tabulky uspořádáme znaménka funkčních hodnot jednotlivých polynomů Sturmovy posloupnosti ve všech krajních bodech intervalů.

	P_0	P_1	P_2	P_3
$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$
-1	$+$	$+$	$-$	$-$
0	$-$	0	$+$	$-$
1	$+$	$-$	$+$	$-$
∞	$+$	$-$	$+$	$-$

V každém řádků spočítáme kolikrát se mění znaménko z $+$ na $-$ nebo naopak, nuly neuvažujeme. Tím získáme počet znaménkových změn pro daný bod. Zároveň poznamenejme, že žádný z krajních bodů intervalů není přímo kořenem daného polynomu.

	P_0	P_1	P_2	P_3	W
$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$	*0*
-1	$+$	$+$	$-$	$-$	*1*
0	$-$	0	$+$	$-$	*2*
1	$+$	$-$	$+$	$-$	*3*
∞	$+$	$-$	$+$	$-$	*3*

Je zřejmé, že pokud seřadíme hranice podle velikosti, musí nám příslušný počet znaménkových změn růst nebo zůstat konstantní (dobrá kontrola chyb). Abychom určili počet kořenů na daných intervalech, odečítáme počet znaménkových změn v horní mezi intervalu mínus počet znaménkových změn v dolní mezi. Pro kontrolu chyb: nesmí vyjít záporné číslo!

interval	$W(b)$	$W(a)$	*počet kořenů*
$(-\infty, \infty)$	*3*	*0*	*3*
$(-\infty, 0)$	*2*	*0*	*2*
$(0, \infty)$	*3*	*2*	*1*
$[-1, 1]$	*3*	*1*	*2*
$[-1, 0]$	*2*	*1*	*1*

Zřejmě bychom byli schopni separovat jednotlivé kořeny. Pomoci si můžeme i výpočtem hranic absolutních hodnot kořenů:

$$A = \max\{3, 0, 1\} = 3$$
$$B = \max\{1, 3, 0\} = 3$$

$$\frac{1}{4} \leq |\xi_k| \leq 4$$

Závěrem shrneme všechny poznatky o daném polynomu. Víme, že jde o polynom stupně tři. Dle Sturmovy posloupnosti má tři reálné kořeny (tedy žádný komplexní). Všechny kořeny leží v intervalu $[-4, 4]$*. Počet záporných kořenů je 2, z toho jeden v intervalu* $(-1, 0)$*, tzn. druhý záporný kořen leží v intervalu* $[-4, -1)$*. Interval pro první záporný kořen můžeme dokonce zúžit na* $(-1, -\frac{1}{4}]$*. Kladný kořen je jeden, a díky znalostem hranic můžeme určit interval, v kterém leží, jako* $[\frac{1}{4}, 1)$*.*

Mějme nyní polynom stupně n s reálnými koeficienty ve tvaru

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

s reálnými kořeny $\xi_i, i = 1, \ldots, n$, přičemž platí

$$\xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_n.$$

Naším úkolem nyní bude najít všechny kořeny polynomu $P(x)$.

Zdvojená Newtonova metoda

V první řadě se zaměříme na hledání největšího kořenu polynomu $P(x)$. Je možné použít klasickou Newtonovu metodu, ale jak víme, konvergence závisí na volbě počáteční aproximace. Dá se ukázat, že posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou je konvergentní klesající posloupnost pro každou počáteční aproximaci $x_0 > \xi_1$ a $\xi_1 = \lim_{k\to\infty} x_k$. Ale tato konvergence nemusí být vždy dostatečně rychlá. Zavedeme proto zdvojenou Newtonovu metodu, která má tvar

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{P(x_k)}{P'(x_k)}.$$

Geometrický význam je trochu odlišný od klasické Newtonovy metody. Další člen iterační posloupnosti není průsečíkem tečny a osy x, ale průsečíkem sečny se směrnicí $\frac{P'(x_k)}{2}$ a osy x. Zdvojená Newtonova metoda konverguje rychleji než klasická Newtonova metoda, ale můžeme kořen ξ_1 „přestřelit“, tj. pro některý člen iterační posloupnosti platí $x_{k_0} < \xi_1$. V takovém případě pokračujeme klasickou Newtonovou metodou s počáteční aproximací $x_0 = x_{k_0}$.

Postup pro nalezení největšího kořene polynomu:

1. Zvolíme počáteční aproximaci x_0 tak, že $x_0 > \xi_1$. Můžeme použít horní hranici kořenů. Tedy $x_0 = 1 + \frac{A}{|a_n|}$, kde $A = \max\left(|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\right)$.

2. Použijeme zdvojenou Newtonovu metodu, ale musíme kontrolovat, zda jsme nepřestřelili.

3. V případě, že $P(x_{k_0})P(x_0) > 0$, pokračujeme zdvojenou Newtonovou metodou, tedy

$$x_{k_0+1} = x_{k_0} - 2\frac{P(x_{k_0})}{P'(x_{k_0})}.$$

4. V případě, že $P(x_{k_0})P(x_0) < 0$, přestřelili jsme a pokračujeme klasickou Newtonovou metodou, tedy

$$x_{k_0+1} = x_{k_0} - \frac{P(x_{k_0})}{P'(x_{k_0})}.$$

   Pozn. jako počáteční aproximace pro klasickou Newtonovu metodu je brána přestřelená aproximace.

   Dále pokračujeme už pouze klasickou metodou.

5. Pokračujeme tak dlouho, dokud nedosáhneme požadované přesnosti.

Pozn. Pro výpočet funkčních hodnot polynomu $P(x)$ a derivace polynomu $P'(x)$ je výhodné využít Hornerovo schéma.

Příklad 11. *Najděte největší kořen polynomu*

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Nejprve spočítáme hranice kořenů:
$A = max\{0, 5, 0, 4\} = 5$
$B = max\{1, 0, 5, 0\} = 5$
$\frac{1}{1+\frac{5}{4}} \le |\xi_k| \le 1 + \frac{5}{1}$
$\frac{4}{9} \le |\xi_k| \le 6$
Spočítáme derivaci polynomu: $P'(x) = 4x^3 - 10x$.
Zdvojená Newtonova metoda má tvar :

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{(x_k)^4 - 5(x_k)^2 + 4}{4(x_k)^3 - 10x_k}$$

Jako počáteční aproximaci zvolíme horní hranici kořenů, tj. $x_0 = 6$ *a podle předchozích pokynů sestrojíme iterační posloupnost:*

$$\begin{aligned}
x_0 &= 6 \\
x_1 &= 3{,}2139 \qquad && P(x_1)P(x_0) > 0 \Rightarrow \text{ pokračujeme zdvojenou metodou} \\
x_2 &= 2{,}0406 && P(x_2)P(x_0) > 0 \Rightarrow \text{ pokračujeme zdvojenou metodou} \\
x_3 &= 1{,}9642 && P(x_3)P(x_0) < 0 \Rightarrow \text{ pokračujeme klasickou metodou} \\
x_4 &= 1{,}9642 - \frac{1{,}9642^4 - 5 \cdot 1{,}9642^2 + 4}{4 \cdot 1{,}9642^3 - 10 \cdot 1{,}9642} = 2{,}0022 \\
x_5 &= 2{,}0000 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Newtonova–Maehlyova metoda

Po aproximaci $\tilde{\xi}_1$ největšího kořene ξ_1 polynomu $P(x)$ budeme hledat další kořeny. Mohli bychom využít metodu snižování stupně a zdvojenou Newtonovu metodu aplikovat na polynom

$$P_1(x) = \frac{P(x)}{x - \tilde{\xi}_1}.$$

Takto bychom mohli postupně najít všechny kořeny polynomu. V průběhu však dochází k zaokrouhlovacím chybám. Největší kořen neznáme přesně a ani polynom $P_1(x)$ nebude znám přesně, budeme tedy hledat aproximaci kořene polynomu s nepřesnými koeficienty.

Nepřesné koeficienty však můžou mít za následek naprosto odlišné kořeny od původních kořenů.

Řešením je spočítat derivaci polynomu P_1 jako

$$P_1'(x) = \frac{P'(x)}{x - \tilde{\xi}_1} - \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1)^2}.$$

Newtonova metoda pro polynom P_1 má tedy tvar

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k) - \frac{P(x_k)}{x_k - \tilde{\xi}_1}}.$$

Stejným způsobem můžeme najít i další kořeny. Předpokládejme, že jsme už aproximovali $\tilde{\xi}_1, \dots \tilde{\xi}_j$ a hledáme $\tilde{\xi}_{j+1}$. Newton–Maehlyova metoda má tvar

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k) - \sum_{i=1}^{j} \frac{P(x_k)}{x_k - \tilde{\xi}_i}}.$$

Samozřejmě můžeme použít i zdvojenou verzi, ale musíme si dát pozor, abychom nepřestřelili.

Poznamenejme, že před použitím Newton–Maehlyovy metody je dobré provést separaci jednotlivých kořenů, např. pomocí Sturmovy věty. Je také dobré nejprve zjistit, zda některé kořeny nejsou násobné.

Příklad 12. *Najděte všechny kořeny polynomu*

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 1.$$

Nejprve opět spočítáme hranice kořenů:
$A = max\{3, 0, 1\} = 3$
$B = max\{1, 3, 0\} = 3$
$\frac{1}{1+\frac{3}{1}} \leq |\xi_k| \leq 1 + \frac{3}{1}$
$\frac{1}{4} \leq |\xi_k| \leq 4$
Spočítáme derivaci polynomu: $P'(x) = 3x^2 + 6x$.
Pozn. Pro lepší informaci o kořenech, bychom pomocí Sturmovy věty mohli určit intervaly, v kterých jednotlivé kořeny leží. Tuto část necháváme k samostatnému procvičení.

Největší kořen najdeme zdvojenou Newtonovou metodou: $\tilde{\xi}_1$*:*

$$x_0 = 4$$

$$x_1 = x^0 - 2\frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = 0{,}9167 \qquad P(x^1)P(x^0) > 0 \Rightarrow \text{ pokračujeme zdvojenou metodou}$$

$$x_2 = x_1 - 2\frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = 0{,}3454 \qquad P(x_2)P(x_0) < 0 \Rightarrow \text{ pokračujeme klasickou metodou}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{P(x_2)}{P'(x_2)} = 0{,}5927$$

$$x_4 = 0{,}5358$$

$$x_5 = 0{,}5321$$

$$\vdots$$

Nyní přistoupíme k odhadu druhého největšího kořene. Použijeme Newton–Maehlyovu metodu. Nejprve je zapotřebí zvolit počáteční aproximaci. Ta by zřejmě měla být menší než aproximace předchozího kořene. Pokud jsme provedli separaci kořenů, můžeme nyní tuto informaci zohlednit. Rozhodli jsme se jako počáteční aproximaci pro druhý největší kořen zvolit $x_0 = 0{,}5$*.*

$\tilde{\xi}_2$*:*

$$x_0 = 0{,}5$$

$$x_1 = x_0 - 2\frac{P(x_0)}{P'(x_0) - \frac{P(x_0)}{x_0 - \tilde{\xi}_1}} = -1{,}2351 \qquad P(x_1)P(x_0) < 0 \Rightarrow \text{ pokračujeme klasickou metodou}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1) - \frac{P(x_1)}{x_1 - \tilde{\xi}_1}} = -0{,}3332$$

$$x_3 = -0{,}6171$$

$$x_4 = -0{,}6522$$

$$x_5 = -0{,}6527$$

$$\vdots$$

Pro aproximaci třetího kořene opět použijeme Newton–Maehlyovu metodu. Tentokrát jsme se rozhodli jako počáteční aproximaci zvolit $x_0 = -0{,}7$.

$\tilde{\xi}_3$*:*

$$\begin{aligned}
x_0 &= -0{,}7\\
x_1 &= x_0 - 2\frac{P(x_0)}{P'(x_0) - \frac{P(x_0)}{x_0-\tilde{\xi}_1} - \frac{P(x_0)}{x_0-\tilde{\xi}_2}} = -5{,}0744 \qquad P(x_1)P(x_0) < 0 \Rightarrow \textit{klasická metoda}\\
x_2 &= x^1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1) - \frac{P(x_1)}{x_1-\tilde{\xi}_1} - \frac{P(x_1)}{x_1-\tilde{\xi}_2}} = -2{,}8794\\
x_3 &= -2{,}8794\\
x_4 &= -2{,}8794\\
x_5 &= -2{,}8794\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Iterační metody řešení systému lineárních rovnic

Dalším tématem, kterému se budeme věnovat, je hledání řešení systému lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s regulární maticí A. Přesné řešení tohoto systému označme $\mathbf{x}^*$ a platí $\mathbf{x}^* = A^{-1}\mathbf{b}$. Ačkoliv je možné spočítat přesné řešení daného systému, v některých případech, kdy má matice A speciální tvar, může být výhodnější využít některou z numerických metod. Myšlenka těchto metod je převést problém na hledání pevného bodu systému, tj.

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{g},$$

kde matice T se nazývá *iterační matice*

Sestrojíme tedy iterační posloupnost ve tvaru

$$\mathbf{x}^{k+1} = T\mathbf{x}^k + \mathbf{g}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Samozřejmě je nutné zabývat se otázkou konvergence této posloupnosti k přesnému řešení soustavy. Existuje několik kritérií (viz skripta, přednášky). Nutnou a postačující podmínkou konvergence je spektrální poloměr matice T (maximální absolutní hodnota vlastních čísel matice) menší než 1.

Pro následující dvě iterační metody zaveďme následující značení

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Matici A tedy můžeme zapsat ve tvaru $A = D - L - U$.

Jacobiho metoda

V případě této metody upravíme systém následovně

$$\begin{aligned}(D - L - U)\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\ D\mathbf{x} &= (L+U)\mathbf{x} + \mathbf{b}\\ \mathbf{x} &= D^{-1}(L+U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}$$

Iterační matice pro Jacobiho metodu je tedy tvaru $T_J = D^{-1}(L+U)$. Nutnou a postačující podmínkou konvergence je, aby spektrální poloměr matice T_J byl menší než 1. Jednodušeji se ale ověřují některé z postačujících podmínek a to zejména vzhledem k tomu, že tyto podmínky se ověřují pomocí matice A.

1. Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní, tj.

   $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = j, \ldots, n.$$

   Pak Jacobiho iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

2. Nechť matice A je ryze sloupcově diagonálně dominantní, tj.

   $$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} |a_{ik}|, \qquad k = j, \ldots, n.$$

   Pak Jacobiho iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Při výpočtu iterační posloupnosti máme dvě možnosti, jak k výpočtu přistoupit. První možnost je využít maticového vyjádření $\mathbf{x}^{k+1} = T_J\mathbf{x}^k + \mathbf{g}_J$. Spočítat matici T_J a vektor $\mathbf{g}_J$. Tento způsob je vhodný zejména při využití počítače. Při ručním výpočtu je výhodnější využít vyjadřování z rovnic následovně:

1. z i-té rovnice vyjádříme x_i
2. $k+1$ iteraci spočítáme dosazením k-té iterace do jednotlivých rovnic

Příklad 13. *Pomocí Jacobiho metody aproximujte řešení systému:*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Jako počáteční aproximaci zvolte vektor $\mathbf{x}^0 = (0,0,0)^T$.

Nejprve ověříme konvergenci Jacobiho metody. Pro ověření nejprve zkontrolujeme, zda nejsou splněny postačující podmínky, které je možné zkontrolovat pomocí zadané matice A. Platí:

$$\begin{aligned} 3 &> 1+1 \\ 4 &> 2+1 \\ 3 &> 1+1 \end{aligned}$$

Tedy matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní. To znamená, že je splněna postačující podmínka konvergence. Poznamenejme, že matice není ryze sloupcově diagonálně dominantní, neboť $3 \not> 2+1$, *a tuto podmínku tedy není možné pro určení konvergence použít.*

1. způsob - vyjadřování z rovnic

Z 1. rovnice vyjádříme x_1: $x_1 = \frac{1}{3}(2 - x_2 - x_3)$

Z 2. rovnice vyjádříme x_2: $x_2 = \frac{1}{4}(4 - 2x_1 - x_3)$

Ze 3. rovnice vyjádříme x_3: $x_3 = \frac{1}{3}(1 - x_1 - x_2)$

Pro výpočet $k+1$ *iterace použijeme ve všech rovnicích* k*-tou iteraci:*

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{3}(2 - x_2^k - x_3^k) \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{4}(4 - 2x_1^k - x_3^k) \\ x_3^{k+1} &= \frac{1}{3}(1 - x_1^k - x_2^k) \end{aligned}$$

Postupně počítáme jednotlivé iterace:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{2}{3} \\ x_2^1 &= 1 \\ x_3^1 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{1}{3}(2 - 1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{9} \\ x_2^2 &= \frac{1}{4}(4 - 2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12} \\ x_3^2 &= \frac{1}{3}(1 - \frac{2}{3} - 1) = -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

Získáme tedy iterační posloupnost ve tvaru $\mathbf{x}^0 = (0,0,0)^T$, $\mathbf{x}^1 = (\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3})^T$, $\mathbf{x}^2 = (\frac{2}{9}, \frac{7}{12}, -\frac{2}{9})^T$, $\mathbf{x}^3 \doteq (0{,}5463; 0{,}9444; 0{,}0648)^T$, …

2. způsob - maticově

Spočítáme matici T_J*:*

$$T_J = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

A vektor $\mathbf{g}_J$*:*

$$\mathbf{g}_J = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Pomocí $\mathbf{x}^{k+1} = T_J\mathbf{x}^k + \mathbf{g}_J$ *získáme stejnou posloupnost jako pomocí prvního způsobu.*

Poznamenejme, že přesné řešení soustavy je $\mathbf{x}^* \doteq (0{,}4231; 0{,}8077; -0{,}0769)^T$*. Relativní chybu třetí iterace můžeme spočítat s použitím vektorové normy jako* $\varepsilon_3 = \frac{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^3\|}{\|\mathbf{x}^*\|}$*. Tedy při použití euklidovské normy dostáváme* $\varepsilon_3 \doteq 0{,}2322$.

Gaussova–Seidelova metoda

V případě této metody upravíme systém následovně

$$
\begin{aligned}
(D-L-U)\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\
(D-L)\mathbf{x} &= U\mathbf{x}+\mathbf{b}\\
\mathbf{x} &= (D-L)^{-1}U\mathbf{x}+(D-L)^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Iterační matice pro Gaussovu–Seidelovu metodu je tedy tvaru $T_G=(D-L)^{-1}U$. Nutnou a postačující podmínkou konvergence je, aby spektrální poloměr matice T_G byl menší než 1. Jednodušeji se ale ověřují některé z postačujících podmínek a to zejména vzhledem k tomu, že tyto podmínky se ověřují pomocí matice A.

1. Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní, tj.

   $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i=j,\dots,n.$$

   Pak Gaussova–Seidelova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0\in\mathbb{R}^n$.

2. Nechť matice A je ryze sloupcově diagonálně dominantní, tj.

   $$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} |a_{ik}|, \qquad k=j,\dots,n.$$

   Pak Gaussova–Seidelova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0\in\mathbb{R}^n$.

3. Nechť A je pozitivně definitní matice. Pak Gaussova–Seidelova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0\in\mathbb{R}^n$.

Zřejmě první dvě postačující podmínky jsou stejné jako u Jacobiho metody. V případě jejich splnění konvergují tedy obě metody a Gaussova–Seidelova metoda konverguje rychleji (na druhou stranu výpočet Jacobiho metody je jednodušší).

Při výpočtu iterační posloupnosti máme dvě možnosti, jak k výpočtu přistoupit. První možnost je využít maticového vyjádření $\mathbf{x}^{k+1}=T_G\mathbf{x}^k+\mathbf{g}_G$. Spočítat matici T_G a vektor $\mathbf{g}_G$. Tento způsob je vhodný zejména při využití počítače. Při ručním výpočtu je výhodnější využít vyjadřování z rovnic následovně:

1. z i-té rovnice vyjádříme x_i

2. $k+1$ iteraci spočítáme dosazením nejvyšší známé iterace $x_j, j\neq i$ do jednotlivých rovnic, tj. pro $j<i$ použijeme $k+1$ iteraci a pro $j>i$ použijeme k-tou iteraci

Příklad 14. *Pomocí Gaussovy–Seidelovy metody aproximujte řešení systému:*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Jako počáteční aproximaci zvolte vektor $\mathbf{x}^0 = (0,0,0)^T$.

Příklad je totožný s příkladem pro Jacobiho metodu. Víme, že matice A *je ryze řádkově diagonálně dominantní. Tedy Gaussova–Seidelova (stejně jako Jacobiho) metoda konverguje.*

1. způsob - vyjadřování z rovnic

Z 1. rovnice vyjádříme x_1: $x_1 = \frac{1}{3}(2 - x_2 - x_3)$
Z 2. rovnice vyjádříme x_2: $x_2 = \frac{1}{4}(4 - 2x_1 - x_3)$
Ze 3. rovnice vyjádříme x_3: $x_3 = \frac{1}{3}(1 - x_1 - x_2)$
Pro výpočet $k+1$ *iterace použijeme nejvyšší známou iteraci:*

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{3}(2 - x_2^k - x_3^k) \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{4}(4 - 2x_1^{k+1} - x_3^k) \\ x_3^{k+1} &= \frac{1}{3}(1 - x_1^{k+1} - x_2^{k+1}) \end{aligned}$$

Postupně počítáme jednotlivé iterace:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{2}{3} \\ x_2^1 &= \frac{1}{4}(4 - 2\frac{2}{3} - 0) = \frac{2}{3} \\ x_3^1 &= \frac{1}{3}(1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{1}{3}(2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9}) = \frac{13}{27} \doteq 0{,}4814 \\ x_2^2 &= \frac{1}{4}(4 - 2\frac{13}{27} + \frac{1}{9}) = \frac{85}{108} \doteq 0{,}7870 \\ x_3^2 &= \frac{1}{3}(1 - \frac{13}{27} - \frac{85}{108}) = -\frac{29}{324} \doteq -0{,}0895 \end{aligned}$$

Získáme tedy iterační posloupnost ve tvaru $\mathbf{x}^0 = (0,0,0)^T$, $\mathbf{x}^1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$, $\mathbf{x}^2 \doteq (0{,}4814; 0{,}7870; -0{,}0895)^T$, ...

2. způsob - maticově

Spočítáme matici T_G:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$T_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{18} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$

A vektor $\mathbf{g}_J$:

$$\mathbf{g}_J = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Pomocí $\mathbf{x}^{k+1} = T_G\mathbf{x}^k + \mathbf{g}_G$ získáme stejnou posloupnost jako pomocí prvního způsobu.

Relativní chyba druhé iterace při použití euklidovské normy je $\varepsilon_2 \doteq 0{,}0631$. Je tedy vidět, že Gaussova–Seidelova metoda konverguje rychleji.

Příklad 15. Rozhodněte, zda Gaussova–Seidelova metoda řešení systému:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 1 \\ 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 16x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci.

Vidíme, že matice soustavy není ryze řádkově ani sloupcově diagonálně dominantní. To znamená, že pomocí těchto postačujících podmínek nejsme schopni rozhodnout o konvergenci metody. Spočítáme tedy spektrální poloměr iterační matice, tedy matice T_G. Nejdříve tuto matici musíme zkonstruovat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 16 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$T_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vypočítáme vlastní čísla matice T_G:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 4 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 4\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 4)$$

Vlastní čísla tedy jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_{2,3} = \pm 2i$. Spočítáme absolutní hodnotu těchto čísel tj. $|\lambda_1| = 0$ a $|\lambda_{2,3}| = 2$. Spektrální poloměr matice T_G je tedy 2 a to znamená, že Gaussova–Seidelova metoda nebude konvergovat.

Na závěr poznamenejme, že můžeme mít soustavu s maticí A, pro kterou uvedené metody nebudou konvergovat. Někdy je ale možné vhodnou změnou pořadí rovnic, získat soustavu, pro kterou metody konvergovat budou. Uveďme jednoduchý příklad.

Uvažujeme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= -2 \end{aligned}$$

s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro soustavu lineárních rovnic s touto maticí A Jacobiho ani Gaussova–Seidelova metoda nekonvergují. Změníme-li však pořadí rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -2 \\ x_1 - 3x_2 &= 1, \end{aligned}$$

matice soustavy má tvar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tato matice je ryze řádkově (i sloupcově) diagonálně dominantní a obě metody budou konvergovat.

Newtonova metoda pro řešení systému nelineárních rovnic

Řešíme systém m nelineárních rovnic o m neznámých:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= 0, \end{aligned}$$

vektorový zápis soustavy: $F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^m$, přesné řešení: $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

Systém $F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ převedeme na ekvivalentní úlohu ve tvaru $\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{x})$ s iterační maticí

$$G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - J_F^{-1}(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}),$$

kde $J_F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix}$ se nazývá Jacobiova matice funkce F.

Newtonova iterační metoda pro systém $F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ za předpokladu, že $J_F(\boldsymbol{x})$ je regulární, se spojitými prvky v okolí bodu $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - J_F^{-1}(\boldsymbol{x}_k)F(\boldsymbol{x}_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Iterační posloupnost můžeme počítat pomocí tohoto vztahu. Potřebujeme však počítat inverzní matici. Pro ruční výpočet je jednodušší použít následující postup:

1. označme $\boldsymbol{\Delta}_k = \boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k$
2. $J_F(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{\Delta}_k = -F(\boldsymbol{x}_k) \longrightarrow$ výpočet $\boldsymbol{\Delta}_k$
3. dosazení do iteračního vztahu: $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\Delta}_k$

Příklad 16. *Vypočítejte první dva kroky Newtonovy metody pro zadaný systém rovnic*

$$\begin{aligned} f_1: &\quad x^2 - x + y - \frac{1}{2} = 0 \\ f_2: &\quad x^2 - 5xy - y = 0 \end{aligned}$$

a počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Výpočet parciálních derivací a sestavení Jacobiho matice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} &= 2x - 1, & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} &= 1, \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} &= 2x - 5y, & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} &= -5x - 1, \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ *Jacobiho matice:* $J_F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x-1 & 1 \\ 2x-5y & -5x-1 \end{pmatrix}$.

Označme $\boldsymbol{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ *a počítejme soustavu* $J_F(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\Delta}^0 = -F(\boldsymbol{x}^0)$, *kde*

$$J_F(\boldsymbol{x}^0) = \begin{pmatrix} 2x^0-1 & 1 \\ 2x^0-5y^0 & -5x^0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \text{ a } -F(\boldsymbol{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix},$$

kterou vyřešíme (Gaussova eliminační metoda):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\Delta}^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

1. krok:

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\Delta}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Výpočet $\boldsymbol{\Delta}^1$*: řešíme soustavu* $J_F(\boldsymbol{x}^1)\boldsymbol{\Delta}^1 = -F(\boldsymbol{x}^1)$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{5}{4} & -\frac{29}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta}^1 = \begin{pmatrix} -\frac{13}{776} \\ -\frac{29}{776} \end{pmatrix},$$

2. krok:

$$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{\Delta}^1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{13}{776} \\ -\frac{29}{776} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.2332 \\ 0.2126 \end{pmatrix}.$$

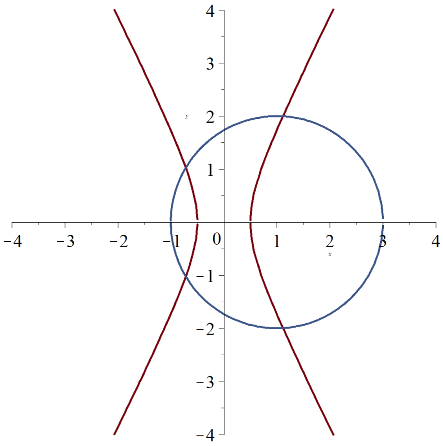
Příklad 17. *Pro zadaný systém nalezněte počáteční aproximaci pro Newtonovu metodu pro hledání kořene z I. kvadrantu.*

$$x = \frac{8x - 4x^2 + y^2 + 1}{8},$$
$$y = \frac{2x - x^2 + 4y - y^2 + 3}{4}.$$

Nejprve upravíme rovnice pro nalezení průsečíku
1. rovnice:
$8x = 8x - 4x^2 + y^2 + 1$
$4x^2 - y^2 = 1$ ... *rovnice hyperboly, hledáme průsečíky s osami:*
průsečík s osou x: $y = 0 \longrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$
průsečík s osou y: $x = 0 \longrightarrow y^2 + 1 = 0$ ... *nemá reálný průsečík*

2. rovnice:
$4y = 2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$
$(x-1)^2 + y^2 = 4$ ... *rovnice kružnice se středem* $S = (1,0)^T$ *a poloměrem* $r = 2$



$\Rightarrow$ *počáteční aproximace:* $\boldsymbol{x}_0 = (1,2)^T$

Přímé metody řešení systému lineárních rovnic

Máme systém lineárních rovnic

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Budeme hledat přesné řešení soustavy $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$.

Nejznámější metodou je Gaussova eliminační metoda (GEM). Hlavní myšlenkou je převést zadaný systém ekvivalentními úpravami na redukovaný problém, tj. na systém s horní trojúhelníkovou maticí $\mathbf{Rx} = \mathbf{c}$. Z toho systému pomocí zpětného chodu jednoduše získáme přesné řešení $\mathbf{x}^*$. Zároveň pomocí GEM můžeme získat rozklad matice $\mathbf{A}$ na součin dolní a horní trojúhelníkové matice.

GEM: $(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \sim \cdots \sim (\mathbf{R}|\mathbf{c})$
Ukážeme si několik modifikací GEM:

1. **GEM bez výměny řádků**
   - neměníme pořadí řádků (ne vždy je to možné - některý pivot může být nulový a nelze pokračovat)
   - násobky prvního řádku odečítáme od ostatních řádků, abychom pod prvním prvkem prvního řádku (hlavní prvek, pivot) získali nuly
   - pokud máme nuly pod pivotem prvního řádku, uděláme totéž pod prvkem na diagonále druhého řádku (pivot druhého řádku)

- postup dále opakujeme podle velikosti matice
- na konci získáme $(\mathbf{R}|\mathbf{c})$, kde $\mathbf{R}$ je horní trojúhelníková matice
- zároveň získáme rozklad matice $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$, kde $\mathbf{L}$ je dolní trojúhelníková matice obsahující multiplikátory, kterými jsme násobili jednotlivé řádky

2. **GEM s částečným výběrem pivota**
   - v prvním sloupci najdeme největší prvek v absolutní hodnotě
   - řádek s tímto prvkem vyměníme s prvním řádkem a prvky pod tímto pivotem vynulujeme
   - v druhém sloupci (bez prvního řádku) najdeme největší prvek v absolutní hodnotě
   - řádek s tímto prvkem vyměníme s druhým řádkem a prvky pod tímto pivotem vynulujeme
   - postup dále opakujeme podle velikosti matice
   - na konci získáme $(\mathbf{R}|\mathbf{c})$, kde $\mathbf{R}$ je horní trojúhelníková matice
   - zároveň získáme rozklad matice $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$, kde $\mathbf{L}$ je dolní trojúhelníková matice obsahující multiplikátory, kterými jsme násobili jednotlivé řádky, a matice $\mathbf{P}$ je permutační matice (ukazuje, které řádky jsme museli vyměnit)

Příklad 18. *Řešte systém lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ -3x_1 & - & 6x_2 & & & = & -3 \end{array}$$

1. ***GEM bez výměny řádků***

   Pro náš systém je rozšířená matice soustavy:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 6 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & -6 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

   První řádek vynásobíme 1 a odečteme od druhého. První řádek vynásobíme $-\frac{3}{2}$ *a odečteme od třetího. Prvky dolní trojúhelníkové matice* $\mathbf{L}$ *tedy budou* $l_{21} = 1$ *a* $l_{31} = -\frac{3}{2}$*. Získáme*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

   Druhý řádek vynásobíme -1 *a odečteme od druhého. Prvek dolní trojúhelníkové matice* $\mathbf{L}$ *tedy bude* $l_{32} = -1$*. Získáme*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

   Řešení systému rovnic tedy je

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{5/2}{1/2} = 5 \\ x_2 &= \frac{1 - 2 \cdot 5}{-3} = 3 \\ x_1 &= \frac{3 + 5 - 6 \cdot 3}{2} = -5 \end{aligned}$$

   Rozklad matice $\mathbf{A}$ *je*

$$\mathbf{A} = \mathbf{LR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. ***GEM s částečným výběrem pivota***

   Začneme se stejnou rozšířenou maticí soustavy:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 6 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & -6 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Z prvního sloupce vybereme největší číslo v absolutní hodnotě. To je -3 ve třetím řádku. Vyměníme tedy třetí řádek s prvním. To odpovídá permutační matici $\mathbf{P_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Získáme*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

První řádek vynásobíme $-\frac{2}{3}$ *a odečteme od druhého, resp. od třetího. Prvky dolní trojúhelníkové matice* $\mathbf{L}$ *tedy budou* $l_{21} = -\frac{2}{3}$ *a* $l_{31} = -\frac{2}{3}$. *Získáme*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

V druhém sloupci vybereme největší prvek v absolutní hodnotě (bez prvního řádku). To je 2 ve třetím řádku. Vyměníme tedy třetí a druhý řádek. To odpovídá permutační matici $\mathbf{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Pozor, musíme vyměnit i již získané prvky matice* $\mathbf{L}$. *Získáme*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Druhý řádek vynásobíme $-\frac{1}{2}$ *a odečteme od druhého. Prvek dolní trojúhelníkové matice* $\mathbf{L}$ *tedy bude* $l_{32} = -\frac{1}{2}$. *Získáme*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Řešení systému rovnic tedy je

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{5/2}{1/2} = 5 \\ x_2 &= \frac{1+5}{2} = 3 \\ x_1 &= \frac{-3+6\cdot 3}{-3} = -5 \end{aligned}$$

Celková permutační matice je

$$\mathbf{P} = \mathbf{P_2}\mathbf{P_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a rozklad matice **PA** *tedy je*

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Další modifikací GEM by mohla být **GEM s úplným výběrem pivota**. Ukážeme si ji rovnou při řešení systému lineárních rovnic z předchozího příkladu.

Začneme opět s rozšířenou maticí soustavy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & -6 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Vybereme největší číslo v absolutní hodnotě v celé matici **A**. To je 6 v prvním řádku a druhém sloupci nebo -6 ve třetím řádku a druhém sloupci. Můžeme si tedy vybrat a řádek s tímto prvkem přesuneme na první řádek. My vybereme prvek v prvním řádku a druhém sloupci, nemusíme tedy žádné řádky měnit. Vynulujeme všechny prvky ve druhém sloupci pod tímto prvkem. První řádek vynásobíme $\frac{1}{2}$ a odečteme od druhého, podobně první řádek vynásobíme -1 a odečteme od třetího. Získáme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

V submatici bez prvního řádku a druhého sloupce vybereme největší prvek v absolutní hodnotě. To jsou $\frac{3}{2}$ v druhém řádku a třetím sloupci. Řádek s tímto prvkem bychom přesunuli na druhý řádek, to už opět máme. Prvky pod tímto prvkem vynulujeme. Druhý řádek vynásobíme $-\frac{2}{3}$ a odečteme od třetího. Získáme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{array}\right)$$

Z této rozšířené matice jednoduše získáme řešení soustavy

$$x_1 = \frac{5/3}{-1/3} = -5$$
$$x_3 = \frac{5/2 + 5}{2/3} = 5$$
$$x_2 = \frac{3 + 5 + 2 \cdot 5}{6} = 3$$

Na závěr se podíváme na obecný rozklad matice **A** na součin dolní a horní trojúhelníkové matice - **obecný LU rozklad**. Zároveň si ukážeme, jak tento rozklad využít při řešení soustav lineárních rovnic.

Obecný LU rozklad ukážeme opět na předchozím příkladu soustavy lineárních rovnic. Máme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Rozklad matice $\mathbf{A}$ si zapíšeme obecně.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} l_{11}u_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} \end{pmatrix}$$

Porovnáním jednotlivých prvků matic získáme 9 rovnic pro 12 neznámých, řešení tedy není jednoznačné. Můžeme například předpokládat, že na diagonále dolní trojúhelníkové matice $\mathbf{L}$ jsou 1, tedy $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$. Pak dostaneme

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nyní přistoupíme k řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tu můžeme přepsat jako $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$. Řešení soustavy najdeme postupným vyřešením dvou soustav lineárních rovnic s trojúhelníkovými maticemi:

$$\mathbf{Lz} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{Ux} = \mathbf{z}$$

Tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Řešení této soustavy je $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$. Poté řešíme další soustavu

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Vyřešením získáme konečné řešení soustavy $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

V předchozí části jsme si ukázali, jak zkonstruovat rozklad matice na součin dolní a horní trojúhelníkové matice a jak tento rozklad následně využít při řešení systému. Následující dvě metody se zaměřují na speciální případy matice $\mathbf{A}$. Hledáme opět přesné řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Choleského rozklad

Tato metoda slouží pro rozklad matice $\mathbf{A}$, která je symetrická a všechny její hlavní minory jsou různé od nuly. V tom případě je možné provést rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{T}^T\mathbf{T}$, kde matice $\mathbf{T}$ je horní trojúhelníková matice. Tuto matici můžeme získat pomocí vzorců ze skript, nebo přímým porovnáním prvků.

Řešení soustavy najdeme postupným vyřešením dvou soustav lineárních rovnic s trojúhelníkovými maticemi:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^T\mathbf{z} &= \mathbf{b}\\ \mathbf{Tx} &= \mathbf{z}\end{aligned}$$

Je-li matice $\mathbf{A}$ pozitivně definitní matice, probíhá výpočet bez problémů. V tom případě jsou všechny prvky matice $\mathbf{T}$ reálné. Obecně však může mít matice $\mathbf{T}$ ryze imaginární prvky. Ty se vyskytují vždy v celém řádku matice a v dalším kroku se imaginární prvky vyruší.

Příklad 19. *Choleského metodou řešte soustavu*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 5\\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 5\\ 8 \end{pmatrix}$$

Matice $\mathbf{A}$ *je symetrická matice. Zkontrolujeme nenulovost hlavních minorů.*

$$\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 5\\ 1 & 5 & 14 \end{vmatrix} = 36$$

Podmínky pro Choleského metodu jsou tedy splněny. Nejprve rozložíme matici $\mathbf{A}$ *na součin matice* $\mathbf{T}^T$ *a* $\mathbf{T}$*, které jsou tvaru*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13}\\ 0 & t_{22} & t_{23}\\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0\\ t_{12} & t_{22} & 0\\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Jejich součinem získáme:

$$\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11}^2 & t_{11}t_{12} & t_{11}t_{13}\\ t_{11}t_{12} & t_{12}^2 + t_{22}^2 & t_{12}t_{13} + t_{22}t_{23}\\ t_{11}t_{13} & t_{12}t_{13} + t_{22}t_{23} & t_{13}^2 + t_{23}^2 + t_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Prvky této matice porovnáme se zadanou maticí. Tím získáme jednotlivé prvky matice $\mathbf{T}$*:*

$$t_{11} = 1 \qquad t_{12} = 1 \qquad t_{13} = 1$$
$$t_{22} = 2 \qquad t_{23} = 2 \qquad t_{33} = 3$$

Řešíme tedy soustavu ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Řešení této soustavy je $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$*. Poté řešíme další soustavu*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vyřešením získáme konečné řešení soustavy $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Příklad 20. *Choleského metodou řešte soustavu*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & = & 6 \end{array}$$

Matice $\mathbf{A}$ *je symetrická matice. Zkontrolujeme nenulovost hlavních minorů.*

$$\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -50$$

Podmínky pro Choleského metodu jsou tedy splněny. Můžeme postupovat stejně jako v předchozím příkladu nebo použít vzorce ze skript.

$$t_{11} = 1 \qquad t_{22} = \sqrt{2 - 2^2} = \sqrt{-2} = \imath\sqrt{2}$$
$$t_{12} = 2 \qquad t_{23} = \frac{1}{\imath\sqrt{2}}(4 - (-1) \cdot 2) = \frac{6}{\imath\sqrt{2}} = -3\imath\sqrt{2}$$
$$t_{13} = -1 \qquad t_{33} = \sqrt{8 - 1 + 18} = 5$$

Matice $\mathbf{T}$ je tedy tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \imath\sqrt{2} & -3\imath\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešíme tedy soustavu ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \imath\sqrt{2} & 0 \\ -1 & -3\imath\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Řešení této soustavy je $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$. Poté řešíme další soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \imath\sqrt{2} & -3\imath\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vyřešením získáme konečné řešení soustavy $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{10} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Croutova metoda

Tato metoda uvažuje matici $\mathbf{A}$, která je třídiagonální, řádkově diagonálně dominantní (nemusí být ryze) a na dvou vedlejších diagonálách se neobjevují nuly. V tom případě je možné provést rozklad na součin dolní a horní trojúhelníkové matice. Tyto matice jsou tvaru:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots \\ 0 & l_{32} & l_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \ \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

a můžeme získat přímým porovnáním prvků.

Řešení soustavy najdeme postupným vyřešením dvou soustav lineárních rovnic s trojúhelníkovými maticemi:

$$\mathbf{Lz} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{Ux} = \mathbf{z}$$

Příklad 21. *Croutovou metodou řešte soustavu*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & & & = & 24 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 30 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -24 \end{array}$$

Matice soustavy je zřejmě třídiagonální a řádkově diagonálně dominantní. Rozklad lze tedy provést. Součin matic vypadá následovně

$$\mathbf{LU} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & 0 \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{22}u_{23} \\ 0 & l_{32} & l_{32}u_{23} + l_{33} \end{pmatrix}$$

Porovnáním s maticí $\mathbf{A}$ *získáme jednotlivé prvky matic:*

$$\begin{aligned} l_{11} &= 4 & u_{12} &= \frac{3}{4} \\ l_{21} &= 3 & u_{23} &= -\frac{4}{7} \\ l_{32} &= -1 \\ l_{22} &= \frac{7}{4} \\ l_{33} &= \frac{24}{7} \end{aligned}$$

Řešíme tedy soustavu ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{24}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Řešení této soustavy je $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{48}{7} \\ -5 \end{pmatrix}$. *Poté řešíme další soustavu*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{48}{7} \\ -5 \end{pmatrix}$$

Vyřešením získáme konečné řešení soustavy $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3 Neřešené příklady

Příklad 1. *Pomocou Newtonovej metódy odhadnite koreň funkcie*

$$f(x) = 6x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$$

pre $x \in [2, 5]$.

Příklad 2. *Pomocí metody sečen aproximujete s přesností* 10^{-5} *kořen funkce*

$$f(x) = \ln(x-1) + \cos(x-1)$$

pro $x \in [1, 2]$.

Příklad 3. *Pomocí metody regula falsi aproximujete s přesností* 10^{-4} *kořen funkce*

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - 2$$

pro $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Příklad 4. *Pomocí metody quasi-Newtonovy metody aproximujete s přesností* 10^{-4} *kořen funkce*

$$f(x) = -x^3 - \cos(x)$$

s počáteční aproximací $x_0 = 0$*. Uvažujte obě varianty metody a diskutujte, která varianta je vhodná.*

Příklad 5. *Pomocí metody sečen, metody regula falsi a quasi–Newtonovy metody aproximujete s přesností* 10^{-4} *všechny kořeny funkce*

$$f(x) = (x-2)^2 - ln(x).$$

Nejprve nalezněte intervaly, které obsahují právě jeden kořen.

Příklad 6. *Z matematickej analýzy vieme, že na intervale* $(0, 2)$ *platí:*

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}.$$

Použite postupnosť čiastočných súčtov pre približné určenie hodnoty $\ln(\frac{3}{2})$*. Použite Aitkenovu* Δ^2*-metódu pre urýchlenie konvergencie. Porovnajte získané výsledky.*

Příklad 7. *Uvažujme nasledujúcu rovnicu:*

$$x\mathrm{e}^x = 1.$$

Aplikujte prostú iteračnú metódu a Steffensenovu metódu na funkcie $g_1 = \mathrm{e}^{-x}$ *a* $g_2 = \frac{x+1}{\mathrm{e}^x+1}$*. Zistite rády týchto metód a porovnajte rýchlosti konvergencie. (V prípade Steffensenovej metódy a funkcie* g_2 *je v Matlabe nutné zvýšiť presnosť výpočtu.)*

Aktualizace dne: 10. května 2020

Příklad 8. *Pomocou Newtonovej metódy nájdite koreň funkcie* $f(x) = (\tan(x) - 1)^3$. *Použite aj klasickú verziu aj verziu upravenú pre viacnásobný koreň a porovnajte rýchlosť konvergencie.*

Příklad 9. *Pomocou Hornerovej schémy a všeobecného tvaru racionálnych koreňov polynómu s celočíselnými koeficientmi nájdite všetky racionálne korene polynómu*

$$2x^6 - 9x^5 + 13x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 4.$$

Riešenie: $2, 2, 1, -\frac{1}{2}$.

Příklad 10. *Pomocou hraníc pre korene polynómu a Sturmovej vety separujte korene nasledujúceho polynómu*

$$2x^3 - x^2 - 6x + 3.$$

Riešenie (jedno z možných): $[-4, -\frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, 1), [1, 4]$.

Příklad 11. *Pomocou klasickej Newtonovej metódy a zdvojenej Newtonovej metódy nájdite najväčší reálny koreň polynómu*

$$x^8 - 10x^3 - 1.$$

Výsledky porovnajte. Ako počiatočnú aproximáciu môžete zvoliť horný odhad pre korene polynómu.

Příklad 12. *Pomocou Newtonovej–Maehlyovej metódy odhadnite všetky vlastné čísla matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 13. *Pomocou Jacobiho metódy a Gaussovej–Seidelovej metódy odhadnite riešenie systému*

$$\begin{aligned} 6x_1 \; -x_2 -2x_3 &= 6, \\ -x_1 +5x_2 \; -x_3 &= 10, \\ -3x_1 -2x_2 +7x_3 &= -14. \end{aligned}$$

Nezabudnite sa presvedčiť o konvergencii obidvoch metód pre akúkoľvek počiatočnú aproximáciu.

Příklad 14. *Uvažujme nasledujúci systém lineárnych rovníc:*

$$\begin{aligned} x_1 \; -x_2 \; -x_3 &= 1, \\ +4x_2 -2x_3 &= 2, \\ x_1 -2x_2 -2x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Zistite, či pre tento systém konvergujú pre akúkoľvek počiatočnú aproximáciu metódy Jacobiho a Gaussova–Seidelova. Ak áno, použite ich na odhad riešenia.

Aktualizace dne: 10. května 2020

Riešenie: obidve metódy konvergujú.

Příklad 15. *Uvažujme nasledujúci systém nelineárnych rovníc*

$$\begin{aligned} -x^2 + y^2 &= 1, \\ x^2 - y &= 0. \end{aligned}$$

Pomocou náčrtu zvoľte vhodnú počiatočnú aproximáciu pre koreň nachádzajúci sa v prvom kvadrante. Vypočítajte ďalšie dve aproximácie Newtonovej metódy.

Příklad 16. *Uvažujme nasledujúcu maticu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pre vhodnú permutačnú maticu P nájdite pomocou GEM rozklad matice $PA = LR$, kde L je dolná trojuholníková matica a R je horná trojuholníková matica. Pomocou tohto rozkladu vyriešte systémy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_i$, kde $\mathbf{b}_1 = (0, 1, -2)^T$, $\mathbf{b}_2 = (-2, -3, 1)^T$ a $\mathbf{b}_3 = (-5, -8, 2)^T$.

Příklad 17. *Overte, či nasledujúci systém spĺňa podmienky pre použitie Choleského metódy.*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & - & 10x_3 & = & 48 \\ -2x_1 & + & 37x_2 & + & 47x_3 & = & 54 \\ -10x_1 & + & 47x_2 & + & 83x_3 & = & -20 \end{array}$$

Ak áno, potom ho s jej pomocou vyriešte.

Příklad 18. *Overte, či nasledujúci systém spĺňa podmienky pre použitie Croutovej metódy.*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & & & = & 3 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & & & = & -5 \\ & + & 3x_2 & - & 5x_3 & - & x_4 & = & -3 \\ & & & + & 4x_3 & + & 6x_4 & = & 10 \end{array}$$

Ak áno, potom ho s jej pomocou vyriešte.