M6150 Funkcionálna analýza I

Lineárne priestory

Peter Šepitka

leto 2023

Obsah

Obsah

Symbolom $\mathbb{T}$ budeme označovať teleso reálnych, resp. komplexných čísiel.

Definícia 1 (Normovaný lineárny priestor)

Nech X je lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ a $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ je zobrazenie, ktoré pre každú dvojicu vektorov $x, y \in X$ a každý skalár $\lambda \in \mathbb{T}$ spĺňa podmienky

N1 $\|x\| = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$;

N2 $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogenita);

N3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojuholníková nerovnosť).

Zobrazenie $\|\cdot\|$ sa nazýva norma na priestore X a dvojicu $(X, \|\cdot\|)$ označujeme ako normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$.

Poznámka 1

Ľahko sa overí, že pre každý normovaný priestor X s normou $\|\cdot\|$ je zobrazenie

$$\rho(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in X, \tag{1}$$

metrikou na množine X, a tak dvojica (X, ρ) s funkciou ρ v (1) je metrický priestor. Toto pozorovanie umožňuje prenášať aplikovať na normovaný lineárny priestor X všetky pojmy a výsledky z teórie metrických priestorov, ako napríklad úplnosť, kompaktnosť, vlastnosti spojitých zobrazení.

Definícia 2 (Podpriestor normovaného lineárneho priestoru)

Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineárny priestor. Dvojica $(A, \|\cdot\|)$ sa označuje ako podpriestor normovaného priestoru X, ak $A \subseteq X$ je algebraický lineárny podpriestor v X, ktorý je uzavretý v X vzhľadom na metriku ρ v (1).

Poznámka 2

Množinu $A \subseteq X$ budeme označovať za ohraničenú v normovanom priestore $(X, \|\cdot\|)$, ak existuje konštanta $K > 0$ s vlastnosťou $\|x\| \leq K$ pre každé $x \in A$. Takto definovaný pojem ohraničenosti korešponduje s pojmom ohraničenosti zavedeným v kontexte metrických priestorov. Konkrétne, množina $A \subseteq X$ je ohraničená v normovanom priestore X práve vtedy, keď je ohraničená v metrickom priestore (X, ρ) s metrikou ρ definovanou v (1) v Poznámke 1.

Definícia 3 (Banachov priestor)

Normovaný lineárny priestor $(X, \|\cdot\|)$ nad $\mathbb{T}$, ktorý je úplný vzhľadom na metriku v (1), sa nazýva reálny/komplexný Banachov priestor.

Väčšina z preberaných metrických priestorov sú normované lineárne priestory.

Príklad 1

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ položme $X := \mathbb{T}^n$ a nech $p \in [1, \infty)$. Potom zobrazenia

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{T}^n, \tag{2}$$

sú normy na lineárnom priestore X, ktoré podľa Poznámky 1 indukujú metriky ρ_p a ρ_∞. V súlade s Definíciou 3 ďalej platí, že každý z normovaných priestorov $(X, \|\cdot\|_p)$ a $(X, \|\cdot\|_\infty)$ je n-rozmerným Banachovým priestorom.

Príklad 2

Pre pevne zvolené $p \in [1, \infty)$ je priestor postupností l^p predstavený v teórii metrických priestorov zároveň normovaným lineárnym priestorom s normou

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x := \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p. \tag{3}$$

Podobne i priestory l^∞, c a c_0 sú normované lineárne priestory s normou

$$\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad x := \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{T} \text{ je ohraničená postupnosť.} \tag{4}$$

Príklad 2

Každý z priestorov l^p, l^∞, c a c_0 je Banachov priestor nekonečnej dimenzie.

Príklad 3

Nech $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je daný kompaktný interval. Množina $\mathcal{B}[a,b]$ všetkých funkcií ohraničených na $[a,b]$ zrejme tvorí lineárny priestor nad $\mathbb{T}$. Zobrazenie

$$\|f\|_B := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad f \in \mathcal{B}[a,b], \tag{5}$$

je normou na priestore $\mathcal{B}[a,b]$. Množina $\mathcal{C}[a,b]$ všetkých funkcií spojitých na $[a,b]$ predstavuje algebraický lineárny podpriestor v $\mathcal{B}[a,b]$. Každé zo zobrazení

$$\|f\|_C := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad \|f\|_I := \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, \quad f \in \mathcal{C}[a,b], \tag{6}$$

je normou na priestore $\mathcal{C}[a,b]$. Z prednášky o metrických priestoroch vyplýva, že normované priestory $(\mathcal{B}[a,b], \|\cdot\|_B)$ a $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_C)$ sú nekonečno rozmerné Banachove priestory, kým $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_I)$ nie je Banachov priestor. Naviac, $(\mathcal{C}[a,b], \rho_C)$ je podpriestor normovaného priestoru $(\mathcal{B}[a,b], \|\cdot\|_B)$ v zmysle Definície 2, keďže v súlade s (5) a (6) platí $\|f\|_C = \|f\|_B$ pre každdú spojitú funkciu f na $[a,b]$ a množina $\mathcal{C}[a,b]$ je uzavretý algebraický podpriestor v priestore $\mathcal{B}[a,b]$.

Príklad 4

Nech $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je daný merateľný priestor a $p \in [1, \infty)$ dané reálne číslo. Potom množina $L^p(X, \mu)$ všetkých tried μ-merateľných funkcií f, pre ktoré $|f|^p$ je funkcia integrovateľná na množine X vzhľadom na mieru μ, je lineárny priestor nad $\mathbb{T}$. Zobrazenie definovan predpisom

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^p(X, \mu), \tag{7}$$

je norma na $L^p(X, \mu)$. Podobne množina $L^\infty(X, \mu)$ všetkých tried merateľných funkcií f, ktoré sú podstatne ohraničené na množine X, vytvára lineárny priestor nad $\mathbb{T}$. Na tomto priestore je možné zaviesť normu tvaru

$$\|f\|_\infty := \inf\{K \in [0, \infty),\ |f(x)| \leq K \text{ skoro všade na } X\}. \tag{8}$$

Platí, že normované priestory $L^p(X, \mu)$, $p \geq 1$, a $L^\infty(X, \mu)$ sú vzhľadom na odpovedajúce normy v (7) a (8) nekonečno rozmerné Banachove priestory.

Príklad 5 (Funkcie s konečnou variáciou)

V tomto príklade predstavíme ďalšiu dôležitú triedu funkcií. Nech $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je daný kompaktný interval a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ reálna funkcia. Pre konečné delenie

Príklad 5 (Funkcie s konečnou variáciou)

$$D_m \,:\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

intervalu $[a, b]$ uvažujme súčet

$$S(f, D_m) := \sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})|. \tag{10}$$

Nech $\mathcal{D}$ je množina všetkých konečných delení D_m intervalu $[a, b]$ v (9). Veličina

$$\bigvee_a^b (f) := \sup_{D_m \in \mathcal{D}} S(f, D_m) \overset{(10)}{=} \sup_{D_m \in \mathcal{D}} \sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \tag{11}$$

sa nazýva úplná (totálna) variácia funkcie f na intervale $[a, b]$. Ak $\bigvee_a^b (f) < \infty$, hovoríme, že funkcia f má konečnú variáciu na intervale $[a, b]$. Najjednoduchším príkladom funkcie s konečnou variáciou na $[a, b]$ je každá monotónna funkcia f na $[a, b]$. V tomto prípade platí $\bigvee_a^b (f) = |f(b) - f(a)|$. Vo všeobecnosti sa dá dokázať, že funkcia f má konečnú variáciu na intervale $[a, b]$ práve vtedy, keď platí $f(x) = g(x) - h(x)$ pre každé $x \in [a, b]$, kde g a h sú funkcie neklesajúce na $[a, b]$. Množinu všetkých funkcií s konečnou variáciou na danom intervale $[a, b]$ budeme označovať symbolom $\mathcal{BV}[a, b]$. Pomocou formuly (11) sa dá ukázať, že každá funkcia s konečnou variáciou na $[a, b]$ je ohraničená, t.j., platí inklúzia

Príklad 5 (Funkcie s konečnou variáciou)

$$\mathcal{BV}[a,b] \subseteq \mathcal{B}[a,b]. \tag{12}$$

Z definície variácie funkcie v (11) nie je ťažké odvodiť, že pre každú dvojicu reálnych funkcií f a g definovaných na $[a,b]$ a pre každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platia relácie

$$\bigvee_a^b (f+g) \le \bigvee_a^b (f) + \bigvee_a^b (g), \qquad \bigvee_a^b (\lambda f) = |\lambda| \bigvee_a^b (f). \tag{13}$$

Z (13) následne vyplýva, že množina $\mathcal{BV}[a,b]$ je lineárny priestor nad $\mathbb{R}$. Naviac, zobrazenie $\|\cdot\|_{BV} : \mathcal{BV}[a,b] \to [0,\infty)$ definované predpisom

$$\|f\|_{BV} := |f(a)| + \bigvee_a^b (f), \quad f \in \mathcal{BV}[a,b] \tag{14}$$

je norma na $\mathcal{BV}[a,b]$. Funkcia $\|\cdot\|_{BV}$ spĺňa všetky tri axiómy N1-N3 v Definícii 1. V súlade s (13) je $\|f\|_{BV} = 0$ práve vtedy, keď $f(a) = 0$ a $\bigvee_a^b (f) = 0$, t.j., podľa (11) je funkcia $f(x) = 0$ pre každé $x \in [a,b]$. Platnosť axióm N2 a N3 je priamym dôsledkom formuly (14) a relácií v (13). Poznamenajme, že v kontexte inklúzie (12) platí pre normu $\|\cdot\|_B$ v (5) nerovnosť

$$\|f\|_B \le \|f\|_{BV} \quad \text{pre každé } f \in \mathcal{BV}[a,b]. \tag{15}$$

Dôležitým výsledkom je skutočnosť, že dvojica $(\mathcal{BV}[a,b], \|\cdot\|_{BV})$ je Banachov

Príklad 5 (Funkcie s konečnou variáciou)

priestor. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{BV}[a,b]$ je daná cauchyovská postupnosť vzhľadom na normu $\|\cdot\|_{BV}$ v (14). Podľa inklúzie (12) a nerovnosti (15) je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}[a,b]$ cauchyovská postupnosť aj v Banachovom priestore $\mathcal{B}[a,b]$, a teda má v $\mathcal{B}[a,b]$ limitu, t.j., existuje funkcia $f \in \mathcal{B}[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_B = 0, \quad \text{a tak podľa (5)} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{16}$$

Dokážeme, že funkcia $f \in \mathcal{BV}[a,b]$. Je zrejmé, že postupnosť $\{\|f_n\|_{BV}\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená v $\mathbb{R}$, čo následne v súlade s (14) znamená, že aj postupnosť úplných variácií $\{\bigvee_a^b (f_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ je ohraničená. Podľa Bolzanovej–Weierstrassovej vety preto existuje vybraná podpostupnosť $\{f_{n_k}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ s vlastnosťou

$$\lim_{k\to\infty} \bigvee_a^b (f_{n_k}) = d \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Rovnosť v (17) znamená, že pre každé zvolené $\varepsilon > 0$ existuje index $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ taký, že $\bigvee_a^b (f_{n_k}) < d + \varepsilon$ pre každé $k \geq k_\varepsilon$. Podľa definície úplnej variácie funkcie v (10) a (11) potom pre každé delenie D_m v (9) intervalu $[a,b]$ máme

$$S(f_{n_k}, D_m) \overset{(11)}{\leq} \bigvee_a^b (f_{n_k}) < d + \varepsilon \quad \text{pre každé } k \geq k_\varepsilon. \tag{18}$$

Príklad 5 (Funkcie s konečnou variáciou)

Limitovaním v (18) pre $k \to \infty$ so zreteľom na (16) postupne dostávame

$$S(f, D_m) \overset{(10)}{=} \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \overset{(16)}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} |f_{n_k}(x_i) - f_{n_k}(x_{i-1})|$$

$$\overset{(10)}{=} \lim_{k\to\infty} S(f_{n_k}, D_m) \overset{(18)}{\leq} d + \varepsilon \tag{19}$$

pre každé konečené delenie D_m intervalu $[a, b]$ a každé $\varepsilon > 0$. Zo získanej relácie (19) môžeme následne v súlade s (11) úsúdiť, že úplná variácia $\bigvee_a^b (f) \leq d$, t.j., funkcia f má konečnú variáciu na intervale $[a, b]$. Napokon dokážeme, že $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{BV} = 0$, t.j., postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k f aj v norme priestoru $\mathcal{BV}[a, b]$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Potom existuje index $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ taký, že

$$\bigvee_a^b (f_m - f_n) \overset{(14)}{\leq} \|f_m - f_n\|_{BV} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pre každé } m, n \geq n_\varepsilon^1. \tag{20}$$

Limitovaním v (20) pre $m \to \infty$ získame $\bigvee_a^b (f - f_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pre každé $n \geq n_\varepsilon^1$. Ďalej podľa (16) existuje $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ také, že $|f(a) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pre každé $n \geq n_\varepsilon^2$. Následne podľa (14) máme $\|f - f_n\|_{BV} < \varepsilon$ pre každé $n \geq \max\{n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2\}$, t.j., $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{BV} = 0$. To dokazuje úplnosť priestoru $(\mathcal{BV}[a, b], \|\cdot\|_{BV})$.

Príklad 6

V súlade s Poznámkou 1 každá norma na lineárnom priestore X nad $\mathbb{T}$ indukuje metriku na X danú rovnosťou (1). Jedná sa však o špeciálny typ metriky. Konkrétne, z vlastností N1-N3 v Definícií 1 vyplýva, že metrika ρ v (1) spĺňa

(i) $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$ pre každé $x, y, z \in X$;

(ii) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, \rho(x, y)$ pre každé $x, y \in X$ a každé $\lambda \in \mathbb{T}$.

Vlastnosť (ii) sa označuje ako invariantnosť metriky ρ, kým podmienka (ii) znamená, že metrika ρ je homogénna. Naopak, nie je ťažké si premyslieť, že pre každú homogénnu a invariantnú metriku ρ na lineárnom priestore X je zobrazenie $\|x\| := \rho(0, x)$, $x \in X$, norma na priestore X.

Príklad 7

Je potrebné zdôrazniť, že algebraický lineárny podpriestor všeobecného normovaného priestoru X nemusí byť uzavretý v X. Napríklad pre $X := l^1$ je množina $A := \{x \in l^1,\ x$ má len konečne veľa nenulových členov$\}$ evidentným vlastným algebraickým lineárnym podpriestorom v X, ktorý však nie je uzavretý v X, nakoľko $\overline{A} = l^1$ vzhľadom na normu $\|\cdot\|_1$ v (3) pre hodnotu $p = 1$. Podľa Definície 2 teda množina A nie je podpriestor normovaného priestoru X.

Lema 1 (Rieszova)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $A \subseteq X$ je vlastný normovaný podpriestor v X. Potom pre každé $\eta \in [0,1)$ existuje vektor $x_\eta \in X$ s $\|x_\eta\| = 1$ taký, že $\rho(x_\eta, A) \geq \eta$, kde ρ je metrika na X definovaná v (1).

Dôkaz Lemy 1.

Podľa predpokladov je množina $X \setminus A$ neprázdna. Zvoľme ľubovoľné $z \in X \setminus A$. Z uzavretosti množiny A v X vyplýva, že vzdialenosť bodu z od A je kladná, t.j., $d := \rho(z, A) > 0$. Obzvlášť, platí

$$d = \inf\{\rho(z,y),\ y \in A\}, \quad \text{a tak } \rho(z,y) \geq d \text{ pre každé } y \in A. \tag{21}$$

Zvoľme pevne nejaké $\eta \in (0,1)$. Keďže $\frac{d}{\eta} > d$, podľa (21) z vlastností infima

$$\text{existuje } \tilde{y} \in A \text{ také, že } 0 < d \leq \rho(z,\tilde{y}) < \frac{d}{\eta}. \tag{22}$$

Položme $x_\eta := \frac{z-\tilde{y}}{\|z-\tilde{y}\|}$. Potom zrejme $\|x_\eta\| = 1$ a pre každé $y \in A$ platí

$$\rho(x_\eta, y) = \|x_\eta - y\| = \left\| \frac{z-\tilde{y}}{\|z-\tilde{y}\|} - y \right\| = \left\| \frac{z-\tilde{y}-\|z-\tilde{y}\|\,y}{\|z-\tilde{y}\|} \right\|$$

Dôkaze Lemy 1.

$$= \frac{\|z - \overbrace{(\tilde{y} + \|z - \tilde{y}\|\, y)}^{\in A}\,\|}{\|z - \tilde{y}\|} \overset{(21),(22)}{>} \frac{d}{\frac{d}{\eta}} = \eta,$$

z čoho následne vyplýva, že $\rho(x_\eta, A) \geq \eta$. Napokon prípad $\eta = 0$ je triviálny, nakoľko metrika ρ je nezáporná. Dôkaz je teda kompletný. ■

Poznámka 3

Poznamenajme, že pre každý vektor $x \in X$ s normou $\|x\| = 1$ platí nerovnosť $\rho(x, A) \leq 1$. Vyplýva to z odhadu

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y),\ y \in A\} \leq \rho(x, 0) = \|x\| = 1 \quad \text{pre každé } x \in S(0, 1),$$

kde symbol $S(0, 1)$ označuje jednotkovú sféru v normovanom priestore X, t.j.,

$$S(0, 1) = \{x \in X,\ \|x\| = 1\}. \tag{23}$$

Ďalej je nutné zdôrazniť, že v Rieszovej leme 1 vo všeobecnosti, t.j., v prípade všeobecného normovaného lineárneho priestoru X a jeho všeobecného podpriestoru A, nemožno uvažovať hodnotu $\eta = 1$. Túto skutočnosť ilustrujeme v nasledujúcom príklade. Podstatná bude nekonečná dimenzia podpriestoru A.

Príklad 8

V normovanom lineárnom priestore $(X, \|\cdot\|)$ tvaru

$$X := \{f \in \mathcal{C}[0,1],\ f(0) = 0\}\,, \quad \|f\| := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|, \tag{24}$$

uvažujme množinu $A \subseteq X$ definovanú predpisom

$$A := \left\{f \in X,\ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\}. \tag{25}$$

Nie je ťažké ukázať, že A je vlastný podpriestor X v zmysle Definície 2, t.j., množina A je lineárny priestor, ktorý je uzavretý v X vzhľadom na metriku ρ indukovanú normou v (24). Jedná sa o netriviálny podpriestor, nakoľko funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ \frac{1}{2} - x, & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \\ x - 1, & x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right], \end{cases} \qquad \text{je spojitá, } f(0) = 0 \text{ a } \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Uzavretosť podpriestoru A je zaručená faktom, že konvergencia v norme znamená podľa (24) rovnomernú konvergenciu na intervale $[0,1]$. Ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ je postupnosť, ktorá konverguje v normovanom priestore X k funkcii f, potom

Príklad 8

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Nech g je ľubovoľný prvok uzavretej jednotkovej gule $B[0,1]$ v X, t.j., $\|g\| \leq 1$. Dokážeme, že $\rho(g,A) < 1$. Označme

$$c_g := \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{26}$$

Pre konštantu c_g platí odhad

$$|c_g| = \left|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |g(x)|\,\mathrm{d}x \overset{(24)}{\leq} \int_0^1 \|g\|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1,$$

pričom vďaka podmienke $g(0) = 0$ platí ostrá nerovnosť $|c_g| < 1$. Definujme

$$f(x) := \begin{cases} g(x) - \frac{2c_g}{1+|c_g|}\cdot\frac{x}{1-|c_g|}, & x \in [0, 1-|c_g|], \\[2ex] g(x) - \frac{2c_g}{1+|c_g|}, & x \in [1-|c_g|, 1]. \end{cases} \tag{27}$$

Funkcia f v (27) je prvkom podpriestoru A, ako sa možno ľahko presvedčiť detailným výpočtom integrálu $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ a pomocou (26). Naviac, pre každé $x \in [0,1]$ platí nerovnosť

Príklad 8

$$|g(x) - f(x)| \overset{(27)}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2|c_g|}{1+|c_g|} \cdot \frac{x}{1-|c_g|}, & x \in [0, 1-|c_g|], \\ \frac{2|c_g|}{1+|c_g|}, & x \in [1-|c_g|, 1]. \end{array} \right\} \leq \frac{2|c_g|}{1+|c_g|} < 1,$$

a tak $\rho(g,f) = \max_{x\in[0,1]} |g(x) - f(x)| < 1$. To však potom znamená, že

$$\rho(g, A) = \inf\{\rho(g,h),\ h \in A\} \leq \rho(g,f) < 1.$$

Výsledok Lemy 1 preto v tomto prípade nemožno rozšíriť i pre hodnotu $\eta = 1$, napriek tomu, že sú splnené všetky jej predpoklady. Nájdime ešte kodimenziu podpriestoru A v X. Vzhľadom na definíciu množiny A v (25) a faktorového priestoru X/A nie je ťažké si premyslieť, že každá daná trieda rozkladu X/A bude obsahovať všetky funkcie z X, pre ktoré je hodnota $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = c$, kde $c \in \mathbb{T}$ je pevná konštanta. To znamená, že faktorový priestor X/A je izomorfný s lineárnym priestorom $\mathbb{T}$, a tak $\operatorname{codim} A = \dim \mathbb{T} = 1$.

Lema 2 (Rieszova)

Nech sú splnené predpoklady Lemy 1 a nech naviac normovaný podpriestor A má konečnú dimenziu. Potom existuje vektor $x \in X$ s $\|x\| = 1$ taký, že $\rho(x, A) = 1$.

Veta 1

Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineárny priestor. Potom norma $\|\cdot\|$ je rovnomerne spojité zobrazenie priestoru X do euklidovského priestoru $\mathbb{E}$.

Dôkaz Vety 1.

Pri dôkaze využijeme ekvivalentné vyjadrenie trojuholníkovej nerovnosti N3 v Definícii 1. Konkrétne, každá norma $\|\cdot\|$ spĺňa nerovnosť

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \quad \text{pre každé } x, y \in X. \tag{28}$$

Skutočne, pre ľubovoľné vektory $x, y \in X$ platí

$$\|x\| = \|(x-y) + y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|,$$
$$\|y\| = \|(y-x) + x\| \leq \|y-x\| + \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|,$$

z čoho ihneď vyplýva požadovaná nerovnosť. Relácia v (28) ukazuje, že norma $\|\cdot\|$ je lipschitzovské zobrazenie s Lipschitzovou konštantou $L = 1$. Z teórie metrických priestorov následne dostávame, že zobrazenie $\|\cdot\|$ je nutne rovnomerne spojité na priestore X. Dôkaz je hotový. ■

Nasledujúca časť je venovaná ekvivalencii noriem na danom lineárnom priestore. Ukážeme, že na rozdiel od ekvivalencie metrík má táto relácia silnejšie dôsledky.

Definícia 4 (Ekvivalencia noriem)

Nech X je lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sú normy na X. Hovoríme, že normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sú ekvivalentné, ak pre každú postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ vektorov v X a každý bod $x \in X$ platí relácia

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ v norme } \|\cdot\|_1 \iff \lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ v norme } \|\cdot\|_2. \tag{29}$$

Veta 2

Nech X je lineárny priestor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ dve normy na X. Potom tieto normy sú ekvivalentné práve vtedy, keď existujú kladné reálne čísla m a M s vlastnosťou

$$m\,\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\,\|x\|_1 \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{30}$$

Dôkaz Vety 2.

Označme ρ_1, ρ_2 metriky indukované normami $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ podľa Poznámky 1. Predpokladajme, že normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sú ekvivalentné a nech $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je postupnosť spĺňajúca $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ v norme $\|\cdot\|_1$. V súlade s (29) potom $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ i v norme $\|\cdot\|_2$, čo znamená, že identické zobrazenie z metrického priestoru (X, ρ_1) do metrického priestoru (X, ρ_2) je spojité v bode $x = 0$. Teda

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

$$\text{pre každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta > 0 \text{ tak, že pre každé } x \in X \text{ s } \|x\|_1 < \delta \text{ je } \|x\|_2 < \varepsilon. \quad (31)$$

Položme v (31) $\varepsilon = 1$. To znamená, že existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou, že pre každé $x \in X$ spĺňajúce $\|x\|_1 < \delta$ platí $\|x\|_2 < 1$. Nech x je ľubovoľný nenulový vektor a označme $\tilde{x} := \frac{\delta}{2\|x\|_1}\, x$. Zrejme $\tilde{x} \in X$ a pre normu $\|\tilde{x}\|_1$ máme

$$\|\tilde{x}\|_1 = \left\| \frac{\delta}{2\|x\|_1}\, x \right\|_1 = \frac{|\delta|}{2\|x\|_1}\, \|x\|_1 = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

V zhode s vyššie uvedeným potom $\|\tilde{x}\|_2 < 1$, čo následne dáva

$$1 > \|\tilde{x}\|_2 = \left\| \frac{\delta}{2\|x\|_1}\, x \right\|_2 = \frac{|\delta|}{2\|x\|_1}\, \|x\|_2 = \frac{\delta}{2}\, \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}, \quad \text{a tak } \|x\|_2 < \frac{2}{\delta}\, \|x\|_1.$$

Tým sme dokázali druhú nerovnosť v (30) s voľbou $M := \frac{2}{\delta} > 0$. Analogicky sa dokáže i platnosť prvej nerovnosti v (30) (v predchádzajúcich úvahách zameníme úlohu noriem $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$). Naopak, ak normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ spĺňajú (30) pre nejaké $m, M > 0$, potom pre každú postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ a bod $x \in X$ máme

$$m\, \|x_k - x\|_1 \le \|x_k - x\|_2 \le M\, \|x_k - x\|_1 \quad \text{pre každý index } k \in \mathbb{N}.$$

Tieto nerovnosti ihneď implikujú ekvivalenciu noriem $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ v súlade s Definíciou 4. Dôkaz je preto kompletný. ∎

Poznámka 4

Poznamenajme, že normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ na X spĺňajúce reláciu (30) sú skutočne v ekvivalentnom vzťahu, nakoľko nie je ťažké overiť, že platí

$$\frac{1}{M}\,\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \frac{1}{m}\,\|x\|_2 \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{32}$$

Príklad 9

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ nech $X := \mathbb{T}^n$. Potom normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na X predstavené v Príklade 1 pre $p = 1$ a $p = 2$ sú podľa Vety 2 ekvivalentné. Skutočne, ak

$$\|x\|_1 \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|x\|_2 \overset{(2)}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in X, \tag{33}$$

potom platia nerovnosti

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{34}$$

Prvá nerovnosť v (34) je dôsledkom klasickej nerovnosti medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom reálnych čísiel $|x_1|, \ldots, |x_n|$, kým druhá nerovnosť v (34) vyplýva triviálne z vyjadrení daných noriem v (33).

Príklad 10

Nech X je lineárny priestor tvaru

$$X := \{f \in \mathcal{C}^1[0,\pi],\ f(0) = 0 = f(\pi)\}, \tag{35}$$

Uvažujme na X dvojicu noriem

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \max_{x\in[0,\pi]} |f(x)|, \\ \|f\|_2 &:= \max_{x\in[0,\pi]} |f(x)| + \max_{x\in[0,\pi]} |f'(x)|, \end{aligned}\right\} \quad f \in X. \tag{36}$$

Jedná sa o neekvivalentné normy. Napríklad pre postupnosť funkcií $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ s predpismi $f_k(x) := \frac{\sin k^2 x}{k}$, $x \in [0,\pi]$, $k \in \mathbb{N}$, platí

$$\|f_k\|_1 \overset{(36)}{=} \max_{x\in[0,\pi]} \left|\frac{\sin k^2 x}{k}\right| = \frac{1}{k},$$

$$\|f_k\|_2 \overset{(36)}{=} \max_{x\in[0,\pi]} \left|\frac{\sin k^2 x}{k}\right| + \max_{x\in[0,\pi]} |k \cos k^2 x| = \frac{1}{k} + k$$

pre každé $k \in \mathbb{N}$. V prvej norme teda postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k funkcii identicky nulovej na $[0,\pi]$, kým vzhľadom na druhú normu je táto postupnosť s ohľadom na Poznámku 2 neohraničená, a teda nemá limitu v priestore $(X, \|\cdot\|_2)$.

Príklad 10

Uvažujme teraz na priestore X nasledujúcu dvojicu noriem

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \left(\int_0^\pi |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_2 &:= \left(\int_0^\pi |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^\pi |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right\} \quad f \in X. \tag{37}$$

Nie je ťažké overiť, že sa skutočne jedná o normy na priestore X v zmysle Definície 1. V tomto prípade sú normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ekvivalentné. Z (37) triviálne vyplýva, že $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ pre každú funkciu $f \in X$. Na druhej strane, pomocou teórie lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu sa dá dokázať nerovnosť

$$\int_0^\pi \left(|f'(x)|^2 - |f(x)|^2\right) \mathrm{d}x \geq 0 \quad \text{pre každé } f \in X \tag{38}$$

(jedná sa o dôsledok diskonjugovanosti rovnice $y'' + y = 0$ na intervale $(0, \pi)$). Využitím výsledku (38) a formúl v (37) potom ihneď dostávame nerovnosť $\|f\|_2 \leq 2\|f\|_1$ pre každú funkciu $f \in X$, ako sa možno ľahko presvedčiť. Celkovo sme teda získali odhady

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq 2\|f\|_1 \quad \text{pre každé } f \in X,$$

ktoré podľa Vety 2 zaručujú ekvivalenciu noriem $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ v (37).

Definícia 5 (Izometria normovaných lineárnych priestorov)

Dvojicu normovaných priestorov $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ nad telesom $\mathbb{T}$ označujeme lineárne izometrickými/izometricky izomorfnými, ak existuje bijektívne lineárne zobrazenie $F : X \to Y$, ktoré zachováva normu, t.j., $\|F(x)\|_Y = \|x\|_X$ pre každý vektor $x \in X$.

Definícia 6 (Homeomorfizmus normovaných lineárnych priestorov)

Normované priestory $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ nad $\mathbb{T}$ sú homeomorfné/lineárne homeomorfné, ak existuje bijektívne lineárne zobrazenie $F : X \to Y$ a kladné konštanty m, M s vlastnosťou $m\,\|x\|_X \leq \|F(x)\|_Y \leq M\,\|x\|_X$ pre každé $x \in X$.

Poznámka 5

Existencia homeomorfizmu medzi dvomi normovanými lineárnymi priestormi zaručuje, že dané priestory sú algebraicky i topologicky/metricky „identické". To následne umožňuje medzi týmito priestormi prenášať pojem otvorenosti, uzavretosti, úplnosti a kompaktnosti. Poznamenajme, že izometria normovaných priestorov je špeciálnym prípadom lineárneho homeomorfizmu s $m = 1 = M$ ako priamo vyplýva z Definícií 5 a 6.

Veta 3

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $A \subseteq X$ je normovaný podpriestor v X. Potom zobrazenie

$$\|[x]\| := \inf_{y\in[x]} \|y\|, \quad [x] \in X/A, \tag{39}$$

je norma na faktorovom priestore X/A. Naviac, ak $(X, \|\cdot\|)$ je Banachov priestor, potom aj $(X/A, \|\cdot\|)$ je Banachov priestor vzhľadom na normu definovanú v (39).

Dôkaz Vety 3.

V súlade s Definíciou 1 najprv ukážeme, že zobrazenie $\|\cdot\|$ predstavené v (39) je norma na priestore X/A. Pre triedu $[x] = A$ podľa (39) máme $\|[x]\| = 0$, nakoľko $0 \in [x]$. Na druhej strane, ak platí $\|[x]\| = 0$, potom v zhode s (39) platí $\inf_{y\in[x]} \|y\| = 0$, a tak existuje postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [x]$ s $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ v X. Keďže postupnosť $\{x - y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ a množina A je uzavretá v X, dostávame, že vektor $x = \lim_{n\to\infty}(x - y_n) \in A$, t.j., trieda $[x] = A$. Overili sme axiómu N1 v Definícii 1. Platnosť axiómy N2 je prirodzeným dôsledkom zavedenia funkcie $\|\cdot\|$ v (39) a definície sčítania a násobenia skalárom vo faktorovom priestore X/A. Axióma N3 v Definícii 1 vyplýva z nasledujúceho výpočtu

$$\|[x]+[y]\| \overset{(39)}{=} \inf_{u\in[x],v\in[y]} \|u+v\| \le \inf_{u\in[x],v\in[y]} (\|u\|+\|v\|) = \inf_{u\in[x]} \|u\| + \inf_{v\in[y]} \|v\|$$

Dôkaz Vety 3 (pokračovanie).

$$\overset{(39)}{=} \|[x]\| + \|[y]\| .$$

Dvojica $(X/A, \|\cdot\|)$ je teda skutočne normovaný lineárny priestor. Predpokladajme, že $(X, \|\cdot\|)$ je Banachov priestor. Nech $\{[x]_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X/A$ je cauchyovská postupnosť vzhľadom na normu $\|\cdot\|$ definovanú v (39), t.j., pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ taký, že $\|[x]_k - [x]_l\| < \varepsilon$ pre každú dvojicu indexov $k, l \geq k_\varepsilon$. V súlade s (39) teda dostávame reláciu

$$\inf_{u \in [x]_k, v \in [x]_l} \|u - v\| < \varepsilon \quad \text{pre každé } k, l \geq k_\varepsilon. \tag{40}$$

Zvoľme pevne $\varepsilon > 0$. Z nerovnosti v (40) následne vyplýva, že existuje postupnosť vektorov $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$, $y_k \in [x]_k$, $k \in \mathbb{N}$ taká, že $\|y_k - y_l\| < \varepsilon$ pre každé $k, l \geq k_\varepsilon$. Postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ je teda cauchyovská v úplnom priestore X, preto existuje limita $\lim_{k\to\infty} y_k =: y \in X$. Ukážeme, že odpovedajúca trieda $[y] \in X/A$ je limitou postupnosti $\{[x]_k\}_{k=1}^{\infty}$ vo faktorovom priestore X/A vzhľadom na normu $\|\cdot\|$ v (39). Skutočne, keďže trieda $[x]_k = [y_k]$ pre každé $k \in \mathbb{N}$, existuje index $l_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou

$$\|[x]_k - [y]\| = \|[y_k] - [y]\| \overset{(39)}{=} \inf_{u \in [y_k], v \in [y]} \|u - v\| \leq \|y_k - y\| < \varepsilon$$

pre každé $k \geq l_\varepsilon$. To znamená, že platí $\lim_{k\to\infty} [x]_k = [y]$ vzhľadom na normu $\|\cdot\|$ v (39). Normovaný faktorový priestor $(X/A, \|\cdot\|)$ je teda úplný. ∎

V normovaných lineárnych priestoroch je prirodzené uvažovať koncept nekonečného radu a vhodným spôsobom definovať jeho konvergenciu.

Definícia 7

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je daná postupnosť. Definujme postupnosť čiastočných súčtov $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, t.j.,

$$y_n := \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

Hovoríme, že nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konverguje/je konvergentný v X, ak postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ má v X limitu vzhľadom na normu $\|\cdot\|$, t.j., $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ pre isté $x \in X$. V tomto prípade kladieme $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x$.

Definícia 8 (Absolútna konvergencia radu)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je daná postupnosť. Hovoríme, že nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konverguje absolútne/je absolútne konvergentný, ak číselný rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \text{ konverguje v } \mathbb{R}. \tag{42}$$

Veta 4

Nech X je normovaný lineárny priestor nad telesom $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Dvojica $(X, \|\cdot\|)$ je Banachov priestor.*

(ii) *Každý absolútne konvergentný nekonečný rad v X je konvergentný v X.*

Dôkaz Vety 4.

Nech $(X, \|\cdot\|)$ je Banachov priestor a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ je absolútne konvergentný nekonečný rad v X. V súlade s Definíciami 3 a 7 stačí ukázať, že postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ v (41) je cauchyovská v X. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Predpoklad (42) v Definícii 8 podľa Cauchyho–Bolzanovho kritéria konvergencie číselného radu potom zaručuje existenciu indexu $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou, že

$$\text{pre každé dva indexy } m, n \geq n_\varepsilon,\ n > m,\ \text{platí } \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon. \tag{43}$$

Využitím trojuholníkovej nerovnosti následne dostávame

$$\|y_n - y_m\| \overset{(42)}{=} \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| \overset{(43)}{<} \varepsilon$$

pre každé $m, n \geq n_\varepsilon$, $n > m$. Postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je teda cauchyovská, a teda i konvergentná v X. V súlade s Definíciou 7 je potom rad $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergentný v priestore X. Predpokladajme teraz platnosť tvrdenia (ii). Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$

Dôkaz Vety 4 (pokračovanie).

je cauchyovská postupnosť v X. Ukážeme, že podmienka (ii) zaručuje, že z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť. Pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n_k \in \mathbb{N}$ také, že

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{k^2} \quad \text{pre každé } n, m \geq n_k. \tag{44}$$

Zrejme bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že postupnosť indexov $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ v (44) je rastúca. V súlade s (44) potom vybraná podpostupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ spĺňa vlastnosť

$$0 \leq \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{k^2} \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{45}$$

Z nerovností (45) postupne dostávame

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \overset{(45)}{\leq} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

To znamená, že v zhode s Definíciou 8 je nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ absolútne konvergentný v X. Podľa predpokladov je následne i konvergentný v zmysle Definície 7. Nie je ťažké overiť, že jeho odpovedajúcou postupnosťou čiastočných súčtov je $\{x_{n_k} - x_{n_1}\}_{k=2}^{\infty}$. Preto podpostupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná v X. Následne i celá cauchyovská postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu v X. Normovaný priestor $(X, \|\cdot\|)$ je teda Banachov, t.j., platí tvrdenie (i). ■

V mnohých aplikáciach je často potrebné uvažovať koncept nekonečného radu a jeho konvergencie vo užšom kontexte než sme predstavili v Definícii 7. Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$. Pre danú neprázdnu indexovú množinu I uvažujme systém vektorov $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq X$. Stojíme pred problémom ako vhodne definovať súčet vektorov systému $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, t.j., zaviesť pojem

$$\text{nekonečný rad } \sum_{\alpha\in I} x_\alpha, \tag{46}$$

obzvlášť v situácii, keď indexová množina I je nespočítateľná. Symbolom $\mathcal{A}$ budeme označovať systém všetkých konečných množín v I.

Definícia 9

Nech $x \in X$ je daný vektor. Hovoríme, že nekonečný rad $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje k x v normovanom lineárnom priestore $(X, \|\cdot\|)$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje množina $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ s vlastnosťou

$$\left\| x - \sum_{\alpha\in A} x_\alpha \right\| < \varepsilon \quad \text{pre každé } A \in \mathcal{A} \text{ spĺňajúce } A_\varepsilon \subseteq A. \tag{47}$$

V tomto prípade sa vektor x označuje ako súčet nekonečného radu $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ v priestore X a píšeme $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$.

V prípade nekonečnej spočítateľnej indexovej množiny I, t.j., $I = \mathbb{N}$, je zaujímavé porovnať vzťah konvergencií nekonečného radu v zmysle Definícií 7, 8 a 9.

Veta 5

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a nech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ je nekonečný spočítateľný systém vektorov. Platia nasledujúce tvrdenia.

- **(i)** *Ak nekonečný rad $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k vektoru $x \in X$ v zmysle Definície 9, potom nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje v X so súčtom x.*
- **(ii)** *Ak $(X, \|\cdot\|)$ je Banachov priestor a nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolútne konvergentný, potom rad $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje v X v zmysle Definície 9.*

Dôkaz Vety 5.

Ak rad $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k vektoru $x \in X$, potom spĺňa reláciu v (47) v Definícii 9, t.j., pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $A_\varepsilon \subseteq \mathbb{N}$ taká, že

$$\left\| x - \sum_{k\in A} x_k \right\| < \varepsilon \quad \text{pre každé } A \in \mathbb{N} \text{ s } A_\varepsilon \subseteq A. \tag{48}$$

Označme $n_\varepsilon := \max A_\varepsilon$. Potom zrejme pre každý index $n \geq n_\varepsilon$ platí inklúzia $A_\varepsilon \subseteq \{1, \ldots, n\}$, a preto v súlade s (48) máme

Dôkaz Vety 5 (pokračovanie).

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| < \varepsilon \quad \text{pre každé } n \geq n_\varepsilon. \tag{49}$$

Podľa Definície 7 relácia v (49) znamená, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje v priestore X so súčtom x. Nech $(X, \|\cdot\|)$ je úplný priestor a predpokladajme, že nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolútne konvergentný, t.j., platí podmienka (42) v Definícii 8. Z Vety 4 vyplýva, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentný v priestore X. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Podľa Definície 7 a Cauchyho–Bolzanovho kritéria konvergencie číselných radov existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ taký, že platí

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pre každé } n, m \geq n_\varepsilon, \quad n > m. \tag{50}$$

Položme $A_\varepsilon := \{1, \ldots, n_\varepsilon\}$. Zvoľme konečnú množinu $A \in \mathbb{N}$ s $A_\varepsilon \subseteq A$. Potom zrejme index $n := \max A$ spĺňa nerovnosť $n \geq n_\varepsilon$. Preto postupne máme

$$\left\| x - \sum_{k\in A} x_k \right\| = \left\| \left(x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} x_k \right) + \sum_{k\in A\setminus A_\varepsilon} x_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} x_k \right\| + \left\| \sum_{k\in A\setminus A_\varepsilon} x_k \right\|$$

$$\overset{(50)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{k\in A\setminus A_\varepsilon} x_k \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} \|x_k\| \overset{(50)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{51}$$

Dôkaz Vety 5 (pokračovanie).

Odvodená nerovnosť (51) korešponduje s reláciou v (47). To znamená, že nekonečný rad $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje v priestore X v zmysle Definície 9. ∎

Poznámka 6

Poznamenajme, že opačné tvrdenie k Vete 5(i) neplatí. Ukazuje to jednoduchý príklad, v ktorom uvažujeme reálny euklidovský priestor $\mathbb{E}$ a dva nekonečné rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{a} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}. \tag{52}$$

Je známe, že prvý nekonečný rad v (52) konverguje v $\mathbb{E}$ v zmysle Definície 7. Táto konvergencia je však neabsolútna, čo má za následok, že druhý rad v (52) nemôže konvergovať v $\mathbb{E}$ v zmysle Definície 9.

Veta 6

Pre danú indexovú množinu I uvažujme množinu nezáporných reálnych čísiel $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Potom rad $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje v euklidovskom priestore práve vtedy, keď $s := \sup\{\sum_{\alpha\in A} x_\alpha,\ A\in\mathcal{A}\} < \infty$. V tomto prípade platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = s$.

Normované priestory s konečnou dimenziou

Poznámka 7

Klasickým výsledkom funkcionálnej analýzy je pozorovanie, že každý normovaný lineárny priestor X nad $\mathbb{T}$, ktorý má konečnú dimenziu $n \in \mathbb{N}$, je lineárne izometrický s priestorom $\mathbb{T}^n$ s vhodnou normou. Konkrétne, nech $\|\cdot\|$ je norma na priestore X a $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ je nejaká Hamelova báza lineárneho priestoru X. Potom zobrazenie $F : X \to \mathbb{T}^n$ tvaru

$$F(x) := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{T}^n, \quad x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in X, \tag{53}$$

je izomorfizmus lineárnych priestorov X a $\mathbb{T}^n$. Funkcia $\|\cdot\|_* : \mathbb{T}^n \to [0, \infty)$ definovaná pre každú n-ticu $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{T}^n$ predpisom

$$\|(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\|_* := \|x\|, \quad x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in X, \tag{54}$$

je norma na priestore $\mathbb{T}^n$, ako možno ľahko overiť podľa Definície 1. A keďže podľa (53) a (54) platí $\|F(x)\|_* = \|x\|$ pre každé $x \in X$, normované priestory $(X, \|\cdot\|)$ a $(\mathbb{T}^n, \|\cdot\|_*)$ sú v súlade s Definíciou 5 izometricky izomorfné. Vo svetle Poznámky 5 sa teda pri skúmaní normovaných priestorov s konečnou dimenziou $n \in \mathbb{N}$ stačí sústrediť na priestor $\mathbb{T}^n$. Všetky získané výsledky budú potom platné pre každý konečno rozmerný normovaný priestor nad telesom $\mathbb{T}$.

Veta 7

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ sú každé dve normy na priestore $\mathbb{T}^n$ ekvivalentné.

Dôkaz Vety 7.

Uvažujme tzv. kanonickú bázu $\{e_1, \dots, e_n\}$ priestoru $\mathbb{T}^n$, t.j.,

$$e_k := (0, \dots, 1, \dots, 0), \quad \text{kde } 1 \text{ je na } k\text{-tej pozícii pre každé } k \in \{1, \dots, n\}. \tag{55}$$

Potom každý vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n$ sa dá zrejme vyjadriť v tvare

$$x = x_1\, e_1 + \dots + x_n\, e_n. \tag{56}$$

Nech $\|\cdot\|$ je ľubovoľná, ale pevne zvolená norma na priestore $\mathbb{T}^n$. Dokážeme, že je ekvivalentná so súčtovou normou

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{57}$$

predstavenou v Príklade 1 pre $p = 1$. Položme $M := \max_{1 \le k \le n} \|e_k\|$. Potom

$$\|x\| \overset{(56)}{=} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \right\| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|\, \|e_k\| \le M \sum_{k=1}^{n} |x_k| \overset{(57)}{=} M\, \|x\|_1, \quad x \in \mathbb{T}^n. \tag{58}$$

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

Z Príkladu 9 ďalej vieme, že daná súčtová norma je ekvivalentná s euklidovskou normou, a tak normovaný priestor $(\mathbb{T}^n, \|\cdot\|_1)$ a euklidovský priestor $\mathbb{E}^n$ nad $\mathbb{T}$ sú podľa Vety 2 a Definície 6 lineárne homeomorfné prostredníctvom identického zobrazenia. Každá podmnožina v $\mathbb{T}^n$, ktorá je ohraničená a uzavretá vzhľadom na súčtovú normu, je teda v tejto norme i kompaktná. Obzvlášť, jednotková sféra $S(0,1)$ v $\mathbb{T}^n$ vzhľadom na normu $\|\cdot\|_1$, zavedená v (23), je kompaktná v tejto norme, nakoľko je vzhľadom na ňu očividne ohraničená a uzavretá v $\mathbb{T}^n$. Uvažujme funkciu $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) := \|x\|$ pre každý vektor $x \in \mathbb{T}^n$. V súlade s Vetou 1 a s ohľadom na nerovnosť (58) je f spojité zobrazenie na $\mathbb{T}^n$ vzhľadom na normu $\|\cdot\|_1$. Podľa Weierstrassovej vety je potom f ohraničená na $S(0,1)$, pričom svoje odpovedajúce globálne extrémy na $S(0,1)$ i nadobúda. Konkrétne, ak $m := \min_{x\in S(0,1)} f(x)$, potom existuje $y \in S(0,1)$ taký, že $m = f(y) = \|y\|$. Zrejme $m \geq 0$. Ak by $m = 0$, potom nutne vektor $y = 0$, a tak i $\|y\|_1 = 0$, čo však odporuje relácii $y \in S(0,1)$. Preto konštanta m je kladná. Nech teraz $x \in \mathbb{T}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$ je ľubovoľné. Potom vektor $\tilde{x} := \frac{x}{\|x\|_1}$ je prvkom jednotkovej sféry $S(0,1)$, a následne platí

$$m \leq f(\tilde{x}) = \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1}, \quad \text{a teda} \quad m\,\|x\|_1 \leq \|x\|. \tag{59}$$

Kombináciou výsledkov v (58) a (59) vo svetle Vety 1 napokon dostávame ekvivalenciu noriem $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_1$. A keďže norma $\|\cdot\|$ bola zvolená ľubovoľne, môžeme uzavrieť, že každé dve normy na $\mathbb{T}^n$ sú vzájomne ekvivalentné. ■

Dôsledok 1

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ *uvažujme normovaný lineárny priestor* $\mathbb{T}^n$ *s normou* $\|\cdot\|$ *a nech* $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{T}^n$ *je nejaká jeho Hamelova báza. Potom v priestore* $\mathbb{T}^n$ *konvergencia v norme* $\|\cdot\|$ *splýva so súradnicovou konvergenciou vzhľadom na bázu* $\{x_1, \dots, x_n\}$*. Presnejšie, ak* $\{x^{[k]}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{T}^n$ *je postupnosť a* $x \in \mathbb{T}^n$ *a*

$$x^{[k]} = \lambda_1^{[k]} x_1 + \cdots + \lambda_n^{[k]} x_n, \quad \left(\lambda_1^{[k]}, \dots, \lambda_n^{[k]}\right) \in \mathbb{T}^n \quad \textit{pre každé } k \in \mathbb{N}, \tag{60}$$

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{T}^n, \tag{61}$$

potom $\lim_{k\to\infty} x^{[k]} = x$ *v norme* $\|\cdot\|$ *práve vtedy, keď* $\lim_{k\to\infty} \lambda_i^{[k]} = \lambda_i$ *pre každý index* $i \in \{1, \dots, n\}$*.*

Dôkaz Dôsledku 1.

Ľahko sa ukáže, že pre každú zvolenú bázu $\{x_1, \dots, x_n\}$ priestoru $\mathbb{T}^n$ je funkcia

$$\|x\|_* := \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|, \quad x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in \mathbb{T}^n, \tag{62}$$

normou na $\mathbb{T}^n$. Obzvlášť, je očividné, že konvergencia v tejto norme je ekvivalentná so súradnicovou konvergenciou vzhľadom na bázu $\{x_1, \dots, x_n\}$. A keďže podľa Vety 7 sú normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_*$ ekvivalentné, platí výsledok v tvrdení. ■

Dôsledok 2

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ je každý normovaný lineárny priestor $(\mathbb{T}^n, \|\cdot\|)$ úplný, t.j., Banachov priestor. Okrem toho každá podmnožina v $\mathbb{T}^n$, ktorá je ohraničená a uzavretá vzhľadom na normu $\|\cdot\|$, je v tejto norme i kompaktná.

Veta 8

Každý normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$, ktorý má konečnú dimenziu, je Banachov priestor a konvergencia v ľubovoľnej norme je ekvivalentná so súradnicovou konvergenciou vzhľadom na akúkoľvek Hamelovu bázu daného priestoru.

Veta 9

Nech X je normovaný lineárny priestor nad telesom $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Priestor X má konečnú dimenziu.*

(ii) *Každá množina $A \subseteq X$, ktorá je ohraničená a uzavretá vzhľadom na normu $\|\cdot\|$, je v tejto norme i kompaktná.*

Dôkaz Vety 9.

Implikácia (i) $\Rightarrow$ (ii) vyplýva z Poznámky 7 a Dôsledku 2. Nech platí výrok (ii), t.j., každá ohraničená a uzavretá podmnožina v X je kompaktná. Obzvlášť, jednotková sféra $S(0,1)$ v (23) je teda množina kompaktná v priestore X. Predpokladajme sporom, že priestor X nemá konečnú dimenziu. Zvoľme ľubovoľný vektor $x_1 \in S(0,1)$. Potom množina $A_1 := \operatorname{Lin}_{\mathbb{T}}\{x_1\}$ je zrejme vlastný algebraický podpriestor lineárneho priestoru X s dimenziou 1. V súlade s Vetou 8 je A_1 úplný normovaný priestor. Množina A_1 je preto uzavretá v X vzhľadom na normu $\|\cdot\|$, čo následne podľa Definície 2 znamená, že A_1 je vlastný podpriestor normovaného priestoru X. Z Lemy 1 pre $\eta := \frac{1}{2}$ potom vyplýva, že existuje vektor $x_2 \in S(0,1)$ taký, že

$$\rho(x_2, A_1) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a tak i} \quad \|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

Vektory x_1 a x_2 sú zrejme lineárne nezávislé. Položme $A_2 := \operatorname{Lin}_{\mathbb{T}}\{x_1, x_2\}$. Využijúc analogické argumenty ako vyššie platí, že A_2 je vlastný podpriestor normovaného priestoru X s dimenziou 2. Podľa Lemy 1 pre $\eta := \frac{1}{2}$ teda existuje vektor $x_3 \in S(0,1)$ s vlastnosťou

$$\rho(x_3, A_2) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a tak i} \quad \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Podobne, množina $A_3 := \operatorname{Lin}\{x_1, x_2, x_3\}$ je vlastný podpriestor normovaného priestoru X s dimenziou 3, pričom existuje vektor $x_4 \in S(0,1)$ spĺňajúci

Dôkaz Vety 9 (pokračovanie).

$$\rho(x_4, A_3) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a tak i} \quad \|x_4 - x_1\| \geq \frac{1}{2}, \quad \|x_4 - x_2\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \|x_4 - x_3\| \geq \frac{1}{2}.$$

Nakoľko priestor X je podľa predpokladu nekonečno rozmerný, môžeme v tomto procese pokračovať ďalej. Získame tak postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S(0,1)$ s vlastnosťou $\|x_k - x_l\| \geq \frac{1}{2}$ pre každé dva rôzne indexy $k, l \in \mathbb{N}$. Daná postupnosť teda nemá žiadny hromadný bod, čo je však v rozpore s kompaktnosťou množiny $S(0,1)$. Preto priestor X musí mať konečnú dimenziu, t.j., platí tvrdenie (i). ■

Poznámka 8

Všimnime si, že v predloženom dôkaze sme vlastne ukázali ekvivalenciu

priestor X má konečnú dimenziu práve vtedy, keď jednotková sféra je kompaktná.

Ďalej poznamenajme, že ďalšie významné kritérium týkajúce sa dimenzie normovaného priestoru je nasledujúce. Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineárny priestor. Potom X má konečnú dimenziu práve vtedy, keď každá norma $\|\cdot\|_*$ na X je ekvivalentná s $\|\cdot\|$. Implikácia „$\Rightarrow$" je vo svetle Poznámky 7 obsahom Vety 7. Dôkaz opačnej implikácie je založený na pozorovaní, že v každom nekonečno rozmernom normovanom priestore X sa dá k danej zvolenej norme $\|\cdot\|$ vždy zostrojiť nová norma $\|\cdot\|_*$ na X, ktorá nie je ekvivalentná s $\|\cdot\|$.

Obsah

V tejto sekcii sa budeme venovať významným špeciálnym typom lineárnych priestorov nad daným telesom $\mathbb{T}$.

Definícia 10 (Unitárny lineárny priestor)

Nech X je lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ a $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{T}$ je zobrazenie, ktoré pre každú trojicu vektorov $x, y, z \in X$ a každú dvojicu skalárov $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ spĺňa

P1 $\langle x,\, x\rangle \geq 0$ a $\langle x,\, x\rangle = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$;

P2 $\langle x,\, y\rangle = \overline{\langle y,\, x\rangle}$ (konjugovaná symetrickosť);

P3 $\langle \lambda\, x + \mu\, y,\, z\rangle = \lambda\,\langle x,\, z\rangle + \mu\,\langle y,\, z\rangle$ (linearita vzhľadom na prvú zložku).

Zobrazenie $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sa nazýva skalárny súčin na X a dvojicu $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ označujeme ako lineárny priestor so skalárnym súčinom, resp. unitárny priestor nad $\mathbb{T}$.

Poznámka 9

Axióma P1 v Definícii 10 hovorí, že skalár $\langle x,\, x\rangle$ je pre každý vektor $x \in X$ nezáporné reálne číslo. Ďalej poznamenajme, že z axióm P2 a P3 všeobecného (t.j., komplexného) skalárneho súčinu v Definícii 10 vyplýva jeho všeobecná antilinearita vzhľadom na druhú zložku, konkrétne platí

$$\langle x,\, \lambda\, y + \mu\, z\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x,\, y\rangle + \overline{\mu}\,\langle x,\, z\rangle \quad \text{pre každé } x, y, z \in X \text{ a každé } \lambda, \mu \in \mathbb{T}. \tag{63}$$

Príklad 11

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ položme $X := \mathbb{T}^n$. Potom zobrazenie

$$\langle x,\, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k\, \overline{y_k}, \quad x = (x_1, \dots, x_n),\; y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{T}^n, \tag{64}$$

je (komplexný) skalárny súčin na lineárnom priestore X, ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Dvojica $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je teda n-rozmerný unitárny priestor.

Príklad 12

Klasickým príkladom unitárneho priestoru s nekonečnou dimenziou je priestor l^2, na ktorom je skalárny súčin definovaný predpisom

$$\langle x,\, y\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, \overline{y_k}, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty},\; y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2. \tag{65}$$

Konvergencia radu v (65) vyplýva z Hölderovej/Cauchyho nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k\, \overline{y_k}| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2 \tag{66}$$

Príklad 12

(Dodatky, Veta 4 pre $p = 2 = q$). Všeobecnejším prípadom tohto unitárneho priestoru je funkcionálny priestor $L^2(X, \mu)$ z Príkladu 4. Skalárny súčin je v tomto prípade definovaný analogickým predpisom

$$\langle f,\, g\rangle := \int_X f\,\overline{g}\,\mathrm{d}\mu, \quad f, g \in L^2(X, \mu), \tag{67}$$

Korektnosť definície v (67) je opäť zaručená Hölderovou nerovnosťou

$$\int_X |f\,\overline{g}|\,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_X |f|^2\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g|^2\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}, \quad f, g \in L^2(X, \mu), \tag{68}$$

(Dodatky, Poznámka 1 pre $p = 2 = q$). V praktických aplikáciach je významný unitárny priestor $L^2[a, b]$ tried funkcií $f : [a, b] \to \mathbb{T}$, pre ktoré $|f|^2$ je funkcia lebesgueovsky intergovateľná na intervale $[a, b]$.

Príklad 13

Na lineárnom priestore $X := \mathcal{C}^1[a, b]$ spojitých funkcií so spojitou deriváciou na kompaktnom intervale $[a, b]$ sa dá zaviesť skalárny súčin tvaru

$$\langle f,\, g\rangle := \int_a^b \left[f(x)\,\overline{g(x)} + f'(x)\,\overline{g'(x)}\right] \mathrm{d}x, \quad f, g \in X. \tag{69}$$

Veta 10 (Cauchyho–Schwarzova–Buňakovského nerovnosť)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Potom platí nerovnosť

$$|\langle x,\, y\rangle| \le \sqrt{\langle x,\, x\rangle}\,\sqrt{\langle y,\, y\rangle} \quad \textit{pre každú dvojicu vektorov } x, y \in X. \tag{70}$$

Dôkaz Vety 10.

Kombináciou axióm P2 a P3 v Definícii 10 sa dá ľahko odvodiť, že $\langle x,\, 0\rangle = 0$ pre každé $x \in X$. Preto ak aspoň jeden z vektorov $x, y \in X$ je nulový, nerovnosť (70) platí triviálne. Uvažujme teda dvojicu nenulových vektorov $x, y \in X$. Podľa axiómy P1 v Definícii 10 platí

$$\langle \lambda x + y,\, \lambda x + y\rangle \ge 0 \quad \text{pre každé } \lambda \in \mathbb{T}. \tag{71}$$

Úpravou (71) v súlade s P2 a P3 v Definícii 10 a (63) v Poznámke 9 máme

$$0 \le \langle tx + y,\, tx + y\rangle = |\lambda|^2 \langle x,\, x\rangle + \lambda\,\langle x,\, y\rangle + \overline{\lambda}\,\overline{\langle x,\, y\rangle} + \langle y,\, y\rangle. \tag{72}$$

Uvažujme hodnotu skaláru $\lambda := -\frac{\overline{\langle x,\, y\rangle}}{\langle x,\, x\rangle}$. Dosadením do (72) dostávame

$$0 \le \frac{|\langle x,\, y\rangle|^2}{\langle x,\, x\rangle^2}\,\langle x,\, x\rangle - \frac{|\langle x,\, y\rangle|^2}{\langle x,\, x\rangle} - \frac{|\langle x,\, y\rangle|^2}{\langle x,\, x\rangle} + \langle y,\, y\rangle = \langle y,\, y\rangle - \frac{|\langle x,\, y\rangle|^2}{\langle x,\, x\rangle}.$$

Získaná nerovnosť priamo implikuje platnosť relácie v (70). Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 10 (Norma a rovnobežníkové pravidlo)

Využitím nerovnosti (70) je možné pomerne ľahko ukázať, že pre každý unitárny priestor X so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je zobrazenie

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,\, x\rangle}, \quad x \in X, \tag{73}$$

normou na lineárnom priestore X. Kým platnosť prvých dvoch axióm v Definícii 1 je pre $\| \cdot \|$ v (73) zrejmá, trojuholníková nerovnosť N3 vyplýva z výpočtu

$$\|x+y\|^2 \overset{(73)}{=} \langle x,\, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x,\, y\rangle + \langle y,\, y\rangle \overset{(73)}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x,\, y\rangle| + \|y\|^2$$

$$\overset{(70),(73)}{\leq} \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\,\|x\| + \|y\|\,)^2 \quad \text{pre každé } x, y \in X.$$

Každý unitárny priestor X je teda zároveň i normovaný lineárny priestor s normou $\| \cdot \|$ v (73) indukovaná skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Obzvlášť, platí

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,(\,\|x\|^2 + \|y\|^2\,) \quad \text{pre každé } x, y \in X. \tag{74}$$

Formula (74) sa štandardne nazýva rovnobežníkové pravidlo. Jej dôkaz je elementárny. Využitím (73) pre každú dvojicu vektorov $x, y \in X$ postupne dostávame

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \overset{(73)}{=} \langle x+y,\, x+y\rangle + \langle x-y,\, x-y\rangle$$

$$= 2\langle x,\, x\rangle + 2\langle y,\, y\rangle \overset{(73)}{=} 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Poznámka 11 (Reálny a komplexný skalárny súčin)

Poznamenajme, že v unitárnych priestoroch sa odpovedajúci skalárny súčin dá reprezentovať pomocou normy definovanej v (73). V tomto prípade však záleží na výbere telesa $\mathbb{T}$. Pre reálny unitárny priestor $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ platí rovnosť

$$\langle x,\, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \quad x, y \in X, \tag{75}$$

ako sa môžeme ľahko presvedčiť aplikáciou formuly (73). V tomto prípade hodnota $\langle x,\, y\rangle \in \mathbb{R}$ pre každé $x, y \in X$, a tak konjugovaná symetrickosť v axióme P2 v Definícii 10 sa redukuje na symetrickosť zobrazenia $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Reálny skalárny súčin na priestore X je teda bilineárna forma na X. Ak teleso $\mathbb{T} = \mathbb{C}$, potom pre skalárny súčin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na lineárnom priestore X platí formula

$$\langle x,\, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\left[\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \|x-\mathrm{i}y\|^2\right]\right), \quad x, y \in X. \tag{76}$$

Komplexný skalárny súčin na X je tzv. "sesquilineárna" forma na priestore X.

Poznámka 12

Pomocou normy $\|\cdot\|$ na unitárnom priestore X zavedenej v Poznámke 10 je možné Cauchyho–Schwarzovu–Buňakovského nerovnosť (70) zapísať v tvare

$$|\langle x,\, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\| \quad \text{pre každé } x, y \in X. \tag{77}$$

Podobne ako sme v Príklade 6 vymedzili všetky metrické lineárne priestory nad $\mathbb{T}$, v ktorých metrika je indukovaná nejakou normou na tomto priestore, nasledujúce pozoruhodné tvrdenie stanovuje všetky normované lineárne priestory nad $\mathbb{T}$, v ktorých norma je indukovaná skalárnym súčinom pomocou rovnosti (73).

Veta 11 (Jordanova–von Neumannova)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$. Potom je táto norma vytvorená nejakým skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na X v zmysle formuly (73) *práve vtedy, keď platí rovnobežníkové pravidlo* (74)*. V tomto prípade pre teleso $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ daný skalárny súčin na X spĺňa rovnosť* (75)*, kým pre teleso $\mathbb{T}=\mathbb{C}$ daný skalárny súčin na X spĺňa rovnosť* (76)*.*

Veta 12

Nech $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitárny priestor nad $\mathbb{T}$. Potom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je spojité zobrazenie priestoru $X\times X$ do normovaného lineárneho priestoru $(\mathbb{T},|\cdot|)$.

Dôkaz Vety 12.

Na unitárnom priestore X uvažujeme normu $\|\cdot\|$ definovanú rovnosťou (73). Na súčinovom priestore $X\times X$ budeme následne pracovať so súčtovou normou

$$\|(x,y)\|_* := \|x\| + \|y\|, \quad (x,y)\in X\times X. \tag{78}$$

Dôkaz Vety 12 (pokračovanie).

Zvoľme dvojicu $(x, y) \in X \times X$ a nech $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X \times X$ je nejaká postupnosť, ktorá konverguje v norme $\|\cdot\|_*$ k vektoru (x, y), t.j.,

$$\lim_{k\to\infty} \|(x,y) - (x_k, y_k)\|_* = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \|(x - x_k, y - y_k\|_* = 0. \tag{79}$$

V súlade s (78) je relácia v (79) ekvivalentná s rovnosťami

$$\lim_{k\to\infty} \|x - x_k\| = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} \|y - y_k\| = 0. \tag{80}$$

Obzvlášť, každá z postupností $\{\|x_k\|\}_{k=1}^{\infty}, \{\|y_k\|\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ je zrejme ohraničená. Pomocou axióm skalárneho súčinu v Definícii 10 a Cauchyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti (77) postupne dostávame

$$\begin{aligned} \big|\langle x_k,\, y_k\rangle - \langle x,\, y\rangle\big| &= \big|\langle x_k,\, y_k\rangle - \langle x,\, y_k\rangle + \langle x,\, y_k\rangle - \langle x,\, y\rangle\big| \\ &= \big|\langle x_k - x,\, y_k\rangle + \langle x,\, y_k - y\rangle\big| \le \big|\langle x_k - x,\, y_k\rangle\big| + \big|\langle x,\, y_k - y\rangle\big| \\ &\overset{(77)}{\le} \|x_k - x\|\,\|y_k\| + \|x\|\,\|y_k - y\|. \end{aligned} \tag{81}$$

Kombináciou odvodenej nerovnosti (81) a relácií v (80) máme

$$\lim_{k\to\infty} \big|\langle x_k,\, y_k\rangle - \langle x,\, y\rangle\big| \overset{(81)}{\le} \lim_{k\to\infty} \Big(\|x_k - x\|\,\|y_k\| + \|x\|\,\|y_k - y\|\Big) \overset{(80)}{=} 0.$$

To dokazuje, že skalárny súčin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je spojité zobrazenie na priestore $X \times X$. ■

Definícia 11 (Hilbertov priestor)

Unitárny priestor $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nad $\mathbb{T}$, ktorý je úplný vzhľadom na normu v (73) indukovanú daným skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na X, sa nazýva Hilbertov priestor.

Príklad 14

Je ľahko vidieť, že skalárny súčin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na $\mathbb{T}^n$ zavedený v Príklade 11 indukuje v súlade s Poznámou 10 euklidovskú normu na $\mathbb{T}^n$ predstavenú v Príklade 1 pre hodnotu $p = 2$. Obvzlášť, euklidovský priestor $\mathbb{E}^n$ nad $\mathbb{T}$ je úplný, a tak $(\mathbb{T}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je podľa Definície 11 n-rozmerný Hilbertov priestor. Na druhej strane, priestory l^2 a $L^2(X,\mu)$ v Príklade 12 sú Hilbertove priestory s nekonečnou dimenziou. Odpovedajúci skalárny súčin v (65) vytvára normu $\|\cdot\|_2$ zavedenú v Príklade 2 pre $p = 2$. Podobne, skalárny súčin v (67) generuje integrálnu normu $\|\cdot\|_2$ definovanú formulou (7) v Príklade 4 pre hodnotu $p = 2$.

Príklad 15

Unitárny lineárny priestor $C^1[a,b]$ so skalárnych súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zavedenom v (69) v Príklade 13 nie je Hilbertov priestor, nakoľko odpovedajúca norma v zmysle (73) nie je úplná. Jeho úplným obalom je Sobolevov unitárny priestor $W^{1,2}[a,b]$.

Definícia 12 (Izometria unitárnych priestorov)

Nech X a Y sú lineárne priestory nad daným telesom $\mathbb{T}$ so skalárnymi súčinmi $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ a $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$. Hovoríme, že unitárne priestory $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ a $(Y,\langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ sú lineárne izometrické/izometricky izomorfné, ak existuje bijektívne lineárne zobrazenie $F : X \to Y$, ktoré zachováva skalárny súčin, t.j.,

$$\langle F(x),\, F(y)\rangle_Y = \langle x,\, y\rangle_X \quad \text{pre každé dva vektory } x, y \in X. \tag{82}$$

Poznámka 13

Všimnime si, že Definícia 12 korešponduje s Definíciou 5. Konkrétne, z izometrického izomorfizmu unitárnych lineárnych priestorov $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ a $(Y,\langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ prirodzene vyplýva izometrický izomorfizmus normovaných lineárnych priestorov $(X,\|\cdot\|_X)$ a $(Y,\|\cdot\|_Y)$ s odpovedajúcimi normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$ v (73). Na základe výsledkov predchádzajúcej sekcie o normovaných priestoroch konečnej dimenzie a z Poznámky 14 ľahko odvodíme, že každý konečno rozmerný Hilbertov priestor nad daným telesom $\mathbb{T}$ s dimenziou $n \in \mathbb{N}$ je izometricky izomorfný s euklidovským priestorom $\mathbb{E}^n$ nad $\mathbb{T}$, v ktorom je skalárny súčin definovaný podľa (64). Podobná klasifikácia platí i v prípade ostatných Hilbertových priestorov, avšak na základe tzv. Hilbertovej dimenzie priestoru. V tomto smere dokážeme, že každý separabilný Hilbertov priestor je izometricky izomorfný s priestormi l^2 a $L^2(X,\mu)$ diskutovanými v Príkladoch 12 a 14.

Dôležitými pojmami v teórii unitárnych lineárnych priestorov je ortogonalita vektorov a ortogonálne množiny vektorov.

Definícia 13 (Ortogonálne a ortonormálne množiny vektorov)

Nech X je unitárny lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Hovoríme, že vektory $x, y \in X$ sú ortogonálne, ak $\langle x,\, y\rangle = 0$. Neprázdna množina nenulových vektorov $S \subseteq X$ sa označuje ako ortogonálna v X, ak platí $\langle x,\, y\rangle = 0$ pre každé dva rôzne vektory $x, y \in S$. Ak naviac $\|x\| = 1$ pre každé $x \in S$, množina S sa nazýva ortonormálny. Podobne množiny $A, B \subseteq X$ sa označujú ako ortogonálne v X, ak platí $\langle a,\, b\rangle = 0$ pre každé $a \in A$ a každé $b \in B$.

Definícia 14 (Ortogonálny doplnok množiny)

Nech X je unitárny lineárny priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $A \subseteq X$ je množina. Množinu $A^{\perp}$ definovaná predpisom

$$A^{\perp} := \{x \in X,\ \langle x,\, y\rangle = 0 \text{ pre každé } y \in A\} \tag{83}$$

nazývame ortogonálny doplnok množiny A v priestore X.

Poznámka 14

Nie je ťažké sa presvedčiť, že platia rovnosti $X^{\perp} = \{0\}$ a $\{0\}^{\perp} = X$.

Poznámka 15

Dôležitým pozorovaním je skutočnosť, že pre každú množinu $A \subseteq X$ je ortogonálny doplnok $A^{\perp}$ v Definícii 14 uzavretý lineárny podpriestor v X, t.j., normovaný podpriestor v X vzhľadom na normu $\|\cdot\|$ v (73). Naviac, platí

$$A \subseteq \left(A^{\perp}\right)^{\perp} \quad \text{pre každú množinu } A \subseteq X. \tag{84}$$

Relácia (84) je dôsledkom linearity skalárneho súčinu vzhľadom na prvú zložku a jeho spojitosti. Je však potrebné zdôrazniť, že v prípade všeobecného unitárneho priestoru sa nemusí inklúzia (84) vždy realizovať ako rovnosť.

Veta 13 (Ortogonálna projekcia do uzavretého podpriestoru)

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $A \subseteq X$ je normovaný lineárny podpriestor. Potom každý vektor $x \in X$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare $x = y + z$, kde $y \in A$ a $z \in A^{\perp}$. Vektor y sa nazýva ortogonálna projekcia vektora x do normovaného podpriestoru A.

Dôkaz Vety 13.

Dokážeme najprv existenciu daného rozkladu pre každý prvok $x \in X$. Ak $x \in A$, potom stačí vziať $y = x$ a $z = 0$. Predpokladajme preto, že vektor $x \in X \setminus A$,

Dôkaz Vety 13 (pokračovanie).

t.j., vzdialenosť $d := \rho(x, A) > 0$. Pripomeňme, že metrika ρ na X je indukovaná normou $\|\cdot\|$ danou skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ podľa (1) a (73). Obzvlášť, platí

$$0 < d \leq \|x - u\| \quad \text{pre každé } u \in A. \tag{85}$$

Naviac, existuje postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ s vlastnosťou

$$\lim_{k\to\infty} \|x - y_k\| = \lim_{k\to\infty} \rho(x, y_k) = d. \tag{86}$$

Ukážeme, že postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská v priestore X. Využitím rovnobežníkového pravidla (74) pre každé dva indexy $m, n \in \mathbb{N}$ postupne máme

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 \\ &\overset{(74)}{=} 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - \|2x - y_n - y_m\|^2 \\ &= 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\right\|^2 \end{aligned} \tag{87}$$

Nakoľko vektor $u := \frac{1}{2}(y_n + y_m)$ je zrejme prvkom podpriestoru A, podľa (85) platí $d \leq \|x - u\|$, a tak pomocou (87) dostávame nerovnosť

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4d^2 \tag{88}$$

A keďže z (86) vieme, že $\lim_{m\to\infty} \|x - y_m\| = d = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\|$, získaná nerovnosť (88) implikuje reláciu

Dôkaz Vety 13 (pokračovanie).

$$\|y_n - y_m\| \to 0 \quad \text{pre} \ \min\{m, n\} \to \infty. \tag{89}$$

Teda postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ je skutočne cauchyovská a vďaka úplnosti priestoru X i konvergentná v X. Označme $y := \lim_{k\to\infty} y_k$. Keďže podpriestor A je uzavretý, vektor $y \in A$. Naviac, využijúc spojitosť normy $\|\cdot\|$ v súlade s Vetou 1, z relácie (86) vyplýva rovnosť $\|x - y\| = d$. Položme $z := x - y$. Ukážeme, že vektor z je prvkom ortogonálneho doplnku $A^{\perp}$, t.j., v zhode s (83) spĺňa $\langle z, u\rangle = 0$ pre každé $u \in A$. Zvoľme nejaký vektor $u \in A$. Potom pre každý skalár $t \in \mathbb{T}$ je

$$z + tu = x - y + tu = x - \underbrace{(y - tu)}_{\in A}, \quad \text{a tak podľa (85) platí } \|z + tu\| \geq d.$$

Následne, využitím formuly (73) a základných vlastností skalárneho súčinu máme

$$d^2 \leq \|z + tu\|^2 \overset{(73)}{=} \langle z + tu, z + tu\rangle = \langle z, z\rangle + t\,\overline{\langle z, u\rangle} + \overline{t}\,\langle z, u\rangle + |t|^2\langle u, u\rangle$$

$$\overset{(73)}{=} \underbrace{\|z\|^2}_{d^2} + |t|^2\|u\|^2 + t\,\overline{\langle z, u\rangle} + \overline{t}\,\langle z, u\rangle, \quad \text{a tak dostávame nerovnosť}$$

$$|t|^2\|u\|^2 + t\,\overline{\langle z, u\rangle} + \overline{t}\,\langle z, u\rangle \geq 0 \text{ pre každé } t \in \mathbb{T}. \tag{90}$$

Nie je ťažké si premyslieť, že posledná nerovnosť môže byť splnená pre každé $t \in \mathbb{T}$ jedine vtedy, keď $\langle z, u\rangle = 0$. Preto $z \in A^{\perp}$, a tak platí rozklad $x = y + z$.

Dôkaz Vety 13 (pokračovanie).

Napokon dokážeme jednoznačnosť tohto rozkladu. Ak $\tilde{y} \in A$ a $\tilde{z} \in A^{\perp}$ je dvojica vekorov spĺňajúca $x = \tilde{y} + \tilde{z}$, potom $y + z = \tilde{y} + \tilde{z}$, a následne $y - \tilde{y} = \tilde{z} - z$. Vektor $y - \tilde{y} \in A$ a vektor $\tilde{z} - z \in A^{\perp}$, takže podľa Definície 14 máme

$$\|y - \tilde{y}\|^2 \overset{(73)}{=} \langle y - \tilde{y}, y - \tilde{y} \rangle = \langle \tilde{z} - z, y - \tilde{y} \rangle = 0,$$

a tak $\tilde{y} = y$, a následne i $\tilde{z} = z$. Dôkaz je teraz kompletný. ■

Dôsledok 3

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $A \subseteq X$ je normovaný lineárny podpriestor. Potom platí rovnosť $A = \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.

Dôkaz Dôsledku 3.

V súlade s Poznámkou 15 zrejme stačí dokázať inklúziu $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq A$. Nech $x \in \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ je ľubovoľný vektor. Z Vety 13 vieme, že existujú vektory $y \in A$ a $z \in A^{\perp}$ s vlastnosťou $x = y + z$. Obzvlášť, podľa (83) máme $\langle x, z \rangle = 0 = \langle y, z \rangle$, a tak $\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = 0$, čo znamená, že vektor $z = 0$. Preto $x = y \in A$. ■

Poznámka 16

Výsledok Vety 13 možno ekvivalentne vyjadriť v tvare

$$X = A \oplus A^{\perp}, \tag{91}$$

kde symbol $\oplus$ reprezentuje algebraický súčet podpriestorov A a $A^{\perp}$. V dôkaze Vety 13 sme ukázali, že pre každý vektor $x \in X$ sa v jeho ortogonálnej projekcii y do normovaného podpriestoru A realizuje vzdialenosť $\rho(x, A)$, t.j., platí $\rho(x, A) = \|x - y\|$. Zobrazenie $P : X \to A$ definované predpisom $P(x) = y$, kde y je ortogonálna projekcia vektora x sa rovnomenne nazýva (ortogonálna) projekcia priestoru X na podpriestor A. Nie je ťažké overiť, že platí

- **(i)** P je lineárne zobrazenie,
- **(ii)** $\mathcal{R}(P) = A$ a $\operatorname{Ker} P = A^{\perp}$,
- **(iii)** $P^2(x) = P(x)$ a $\|P(x)\| \leq \|x\|$ pre každé $x \in X$.

Obzvlášť, z vlastností (i) a (iii) vyplýva, že zobrazenie P je lipschitzovské, presnejšie neexpanzívne zobrazenie. Dokazuje to výpočet

$$\|P(x) - P(y)\| \overset{\text{(i)}}{=} \|P(x - y)\| \overset{\text{(iii)}}{\leq} \|x - y\|, \quad \text{pre každé } x, y \in X \tag{92}$$

Spojitosť projekcie P znamená, že podpriestor $A^{\perp}$ je topologickým doplnkom podpriestoru A v X a rozklad v (91) môžeme zapísať v tvare $X = A \oplus_t A^{\perp}$.

V ďalšej časti prednášky budeme študovať ortonormálnych systémov vektorov.

Definícia 15 (Úplné a uzavreté systémy vektorov)

Nech $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitárny priestor nad $\mathbb{T}$ a $A \subseteq X$ je daná množina.

(i) Systém vektorov A nazývame úplným, ak jediný prvok $x \in X$, ktorý spĺňa $\langle x,\, y\rangle = 0$ pre každé $y \in A$, je $x = 0$.

(ii) Systém vektorov A sa označuje ako uzavretý, ak platí $\overline{\mathrm{Lin}_{\mathbb{T}} A} = X$.

Nasledujúce tvrdenie ukazuje, že v prípade ortonormálnych systémov v Hilbertových priestoroch pojmy úplnosť a uzavretosť zavedené v Definícii 15 splývajú.

Veta 14

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Potom ortonormálny systém $A \subseteq X$ je uzavretý práve vtedy, keď je úplný.

Dôkaz Vety 14.

Nech ortonormálny systém $A \subseteq X$ je uzavretý a nech $x \in X$ spĺňa $\langle x,\, u\rangle = 0$ pre každé $u \in A$. V súlade s Definíciou 15(ii) existuje postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathrm{Lin}_{\mathbb{T}} A$ taká, že $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Potom $\langle x,\, x_k\rangle = 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}$ a následne

Dôkaz Vety 14 (pokračovanie).

$$\|x\|^2 \overset{(73)}{=} \langle x, x\rangle = \left\langle x, \lim_{k\to\infty} x_k \right\rangle \overset{\text{Veta 12}}{=} \lim_{k\to\infty} \langle x, x_k\rangle = \lim_{k\to\infty} 0 = 0,$$

t.j., vektor $x = 0$. Podľa Definície 15(i) je teda systém A úplný. Naopak, nech systém $A \subseteq X$ je úplný a zvoľme ľubovoľný vektor $x \in \left(\overline{\operatorname{Lin} A_{\mathbb{T}}}\right)^{\perp}$. Nakoľko $A \subseteq \overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} A}$, podľa Definície 14 platí $\langle x, u\rangle = 0$ pre každé $u \in A$. Vďaka úplnosti systému A je potom v súlade s Definíciou 15(i) vektor $x = 0$. Takže podpriestor $\left(\overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} A}\right)^{\perp} = \{0\}$, z čoho následne podľa Dôsledku 3 máme

$$\overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} A} = \left(\left(\overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} A}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} \overset{\text{Poznámka 14}}{=} X.$$

V zhode s Definíciou 15(ii) je teda systém A uzavretý a dôkaz je hotový. ■

Poznámka 17

Všimnime si, že úplnosť unitárneho priestoru $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sme využili iba pri dôkaze, že úplný systém $A \subseteq X$ je uzavretý. To znamená, že vo všeobecnom unitárnom lineárnom priestore je každý uzavretý systém vektorov zároveň aj úplný.

Ústredným objektom v teórii unitárnych priestorov je ortonormálna báza.

Definícia 16 (Ortonormálna báza unitárneho priestoru)

Nech X je unitárny lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pod pojmom ortonormálna báza priestoru X rozumieme každý maximálny ortonormálny systém vektorov v priestore X.

Prirodzenou otázkou je existencia ortonormálnej bázy pre daný unitárny priestor. Ukazuje sa, že podobne ako pri lineárnych priestoroch a ich Hamelových bázach odpoveď závisí na predpoklade axiómy výberu.

Veta 15

Každý unitárny lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ má aspoň jednu ortonormálnu bázu.

Dôkaz Vety 15.

Dôkaz prebieha analogicky ako pri dokazovaní existencie algebraickej bázy lineárneho priestoru. Pre všeobecný unitárny lineárny priestor je nekonštruktívny a využíva predpoklad platnosti Zornovej lemy. V prípade separabilného unitárneho priestoru je možné zostaviť alternatívny dôkaz bez použitia Zornovej lemy. Je založený na Gramovom–Schmidtovom ortonormalizačnom procese aplikovanom na vhodný najviac spočítateľný lineárne nezávislý systém vektorov. Tento prístup si ukážeme neskôr v prednáške. ■

Lema 3

Nech X je unitárny priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ortonormálny systém $A \subseteq X$ je ortonormálnou bázou priestoru X práve vtedy, keď je úplný.

Dôkaz Lemy 3.

Každá ortonormálna báza $A \subseteq X$ musí byť nutne úplný systém vektorov. V opačnom prípade by v súlade s Definíciou 15(i) existoval jednotkový vektor $x \in X$ taký, že množina $A \cup \{x\}$ by bola ortonormálnym systémom. To je však v rozpore s vlastnosťou maximality ortonormálnej bázy v Definícii 16. Na druhej strane, ak ortonormálny systém $A \subseteq X$ je úplný, potom podľa Definície 15(i) je maximálnym ortonormálnym systémom. V zhode s Definíciou 16 sa teda jedná o ortonormálnu bázu unitárneho priestoru X. Dôkaz je hotový. ■

Lema 4

Nech X je unitárny priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Každý uzavretý ortonormálny systém $A \subseteq X$ je ortonormálnou bázou priestoru X.

Dôkaz Lemy 4.

Výsledok je priamym dôsledkom komentára v Poznámke 17 a Lemy 3. ■

Nasledujúce tvrdenia sa týkajú vzťahu ortonormality a lineárnej nezávislosti systémov vektorov v unitárnych priestoroch.

Veta 16

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $A \subseteq X$ je ortonormálny systém. Potom A je lineárne nezávislá množina v lineárnom priestore X.

Dôkaz Vety 16.

Nech $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A$, $n \in \mathbb{N}$, je nejaká konečná množina vektorov a nech $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{T}$ je n-tica skalárov spĺňajúca

$$\lambda_1 \, x_1 + \cdots + \lambda_n \, x_n = 0. \tag{93}$$

Využitím základných vlastností skalárneho súčinu potom dostávame

$$0 = \langle x_i, \, 0 \rangle \overset{(93)}{=} \langle x_i, \, \lambda_1 \, x_1 + \cdots + \lambda_n \, x_n \rangle = \overline{\lambda_1} \, \langle x_i, \, x_1 \rangle + \cdots + \overline{\lambda_n} \, \langle x_i, \, x_n \rangle$$

$$= \overline{\lambda_i} \, \langle x_i, \, x_i \rangle \quad \text{pre každé } i \in \{1, \dots, n\}, \tag{94}$$

keďže v súlade s Definíciou 13 platí $\langle x_i, \, x_j \rangle = 0$ pre každé dva rôzne indexy $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Nakoľko $\langle x_i, \, x_i \rangle = 1$ pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$, z (94) máme rovnosť $\lambda_i = 0$ pre každý index $i \in \{1, \dots, n\}$. Vektory $x_1, \dots, x_n$ sú teda lineárne nezávislé v X, a tak množina A je lineárne nezávislá v X. ∎

Veta 17

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $A \subseteq X$ je najviac spočítateľná a lineárne nezávislá množina v X. Potom existuje najviac spočítateľný ortonormálny systém $B \subseteq X$ taký, že platí $\mathrm{Lin}_{\mathbb{T}} B = \mathrm{Lin}_{\mathbb{T}} A$.

Dôkaz Vety 17.

Tvrdenie sa dokáže aplikáciou štandardného Gramovho–Schmidtovho ortonormalizačného procesu na množinu A. ■

Ako sme už zmienili v dôkaze Vety 15, existencia ortonormálnej bázy pre separabilné unitárne lineárne priestory nezávisí na platnosti axiómy výberu.

Veta 18

Nech X je separabilný unitárny priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potom v priestore X existuje aspoň jedna ortonormálna báza.

Dôkaz Vety 18.

Nech $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je množina hustá v priestore X. Z tejto postupnosti vylúčime všetky členy x_l, $l \in \mathbb{N}$, ktoré sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov

Dôkaz Vety 18.

x_k s indexami $k < l$. Touto procedúrou získame najviac spočítateľný a lineárne nezávislý systém $A \subseteq X$, ktorý je uzavretý, t.j., podľa Definície 15(ii) platí $\overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} A} = X$. V súlade s Vetou 17 jej ortonormalizáciou dostaneme najviac spočítateľný ortonormálny systém $B \subseteq X$, ktorý spĺňa $\overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} B} = \overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} A} = X$. Podľa Definície 15(ii) je ortonormálny systém B uzavretý, čo v kombinácii s Lemou 4 napokon dokazuje, že B je ortonormálna báza priestoru X. ∎

Poznámka 18

Doplňme, že v separabilnom unitárnom priestore $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je každý ortonormálny systém $A \subseteq X$ najviac spočítateľná množina. Vyplýva to zo skutočnosti, že pre vzdialenosť každých dvoch rôznych prvkov $x, y \in A$ platí

$$\rho(x,y) \overset{(1)}{=} \|x-y\| \overset{(73)}{=} \sqrt{\langle x-y,\, x-y\rangle} = \sqrt{\langle x,\, x\rangle + \langle y,\, y\rangle} = \sqrt{2}. \tag{95}$$

Je prirodzené študovať vzťah medzi ortonormálnymi a Hamelovými bázami daného unitárneho lineárneho priestoru nad $\mathbb{T}$. Kľúčovými parametrami sú dimenzia daného priestoru a úplnosť priestoru vzhľadom na normu generovanú odpovedajúcim skalárnym súčinom v (73). Ilustrujeme to na nasledujúcich príkladoch.

Príklad 16 (Unitárne lineárne priestory konečnej dimenzie)

V prípade unitárne lineárneho priestoru $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nad $\mathbb{T}$ s konečnou dimenziou je každá ortonormálna báza zároveň i Hamelovou bázou tohto priestoru. Je to dôsledkom úplnosti priestoru X vzhľadom na normu v (73). Skutočne, ak $A \subseteq X$ je nejaká ortonormálna báza, potom kombináciou Lemy 3 a Vety 14 dostávame, že systém vektorov A je uzavretý, t.j., podľa Definície 15(ii) platí $\overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} A} = X$. Nakoľko v konečno rozmerných normovaných priestoroch sú všetky algebraické podpriestory uzavreté, dostávame $\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} A = \overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} A} = X$. To znamená, že množina A je Hamelovou bázou priestoru X (Dodatky, Definícia 12).

Príklad 17 (Hilbertove priestory nekonečnej dimenzie)

V Hilbertovom priestore nekonečnej dimenzie žiadna ortonormálna báza nemôže byť jeho Hamelovou bázou. Toto tvrdenie zdôvodníme neskôr v prednáške.

Pre neúplne nekonečno rozmerné unitárne lineárne priestory nie je všeobecný vzťah medzi ortonormálnymi a Hamelovými bázami. Svedčia o tom nasledujúce dva príklady. Poznamenajme, že obidva skúmané unitárne priestory majú rovnaký úplný obal, konkrétne Hilbertov priestor $L^2[a,b]$ v Príkladoch 12 a 14.

Príklad 18

Na lineárnom priestore $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$ spojitých komplexných funkcií na intervale $[-\pi,\pi]$ je možné definovať skalárny súčin tvaru

$$\langle f,\, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x, \quad f,g\in\mathcal{C}[-\pi,\pi]. \tag{96}$$

Jednou z ortonormálnych báz priestor $(\mathcal{C}[-\pi,\pi],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ je trigonometrický systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, n\in\mathbb{N}\right\}$. Táto množina však nie je Hamelovou bázou priestoru $(\mathcal{C}[-\pi,\pi],\langle\cdot,\cdot\rangle)$, nakoľko existujú spojité funkcie, ktoré na $[-\pi,\pi]$ nemajú tvar trigonometrického polynómu.

Príklad 19

Uvažujme lineárny priestor polynómov $P[-1,1]$ so skalárnym súčinom v (96) na intervale $[-1,1]$. Jeho Hamelovou bázou je spočítateľný systém polynómov $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$. Ortonormalizáciou vznikne systém polynómov $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ tvaru

$$r_n(x) := \frac{1}{n!\,2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{97}$$

Podľa Vety 17 platí $\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}}\{r_n\}_{n=0}^{\infty} = \operatorname{Lin}_{\mathbb{T}}\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$, a tak $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ je Hamelova báza priestoru $P[-1,1]$. Zároveň $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ je aj ortonormálna báza v $P[-1,1]$.

Fourierove koeficienty a Fourierove rady

Definícia 17 (Fourierove koeficienty a Fourierov rad)

Nech X je unitárny lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S \subseteq X$ je ortonormálny systém. Pre dané $x \in X$ sa skaláry definované

$$c_u := \langle x, u \rangle, \quad u \in S, \tag{98}$$

nazývajú Fourierove koeficienty vektora x vzhľadom na systém S. Nekonečný rad $\sum_{u \in S} c_u u$ sa označuje ako Fourierov rad vektora x vzhľadom na systém S.

Základnou témou tejto časti prednášky bude skúmanie konvergencie nekonečného radu $\sum_{u \in S} c_u u$ pre daný vektor $x \in X$. Keďže ortonormálny systém $S \subseteq X$ môže byť vo všeobecnosti nespočítateľný, budeme používať pojem konvergencie nekonečného radu predstavený v Definícii 9. Pre danú ortonormálny systém $S \subseteq X$ a daný vektor $x \in X$ zaveďme označenie

$$s_x(A) := \sum_{u \in A} c_u u \quad \text{pre danú konečnú množinu } A \subseteq S. \tag{99}$$

Nasledujúce tvrdenie je kľúčové pre vyšetrovanie konvergencie Fourierových radov v unitárnych lineárnych priestoroch.

Lema 5

Nech X je unitárny lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $S \subseteq X$ je daný ortonormálny systém. Nech $A \subseteq S$ je nejaká konečná množina, pričom položme $A := \{u_1, \ldots, u_n\}$. Potom pre každý vektor $x \in X$ a pre každú n-ticu skalárov $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{T}$ platí rovnosť

$$\|x - s(A)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{u \in A} |c_u|^2 + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\}} |\lambda_k - c_{u_k}|^2 , \tag{100}$$

kde c_u, c_{u_k}, $k = \{1, \ldots, n\}$, sú odpovedajúce Fourierove koeficienty v (98) vektora x a veličina $s(A) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$.

Dôkaz Lemy 5.

Zvoľme vektor $x \in X$ a skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{T}$. Využitím Definície 17 a základných vlastností skalárneho súčinu v Definícii 10 a Poznámke 9 postupne máme

$$\|x - s(A)\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \right\|^2 \overset{(73)}{=} \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k ,\ x - \sum_{l=1}^{n} \lambda_l u_l \right\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - \sum_{l=1}^{n} \overline{\lambda_l}\, \underbrace{\langle x, u_l\rangle}_{c_{u_l}} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, \underbrace{\langle u_k, x\rangle}_{\overline{c_{u_k}}} + \sum_{k,l=1}^{n} \lambda_k\, \overline{\lambda_l}\, \underbrace{\langle u_k, u_l\rangle}_{\delta_{kl}}$$

Dôkaz Lemy 5 (pokračovanie).

$$\stackrel{(73)}{=} \|x\|^2 - \sum_{l=1}^{n} \overline{\lambda_l}\, c_{u_l} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, \overline{c_{u_k}} + \sum_{m=1}^{n} |\lambda_m|^2$$

$$\stackrel{k=l=m}{=} \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(|\lambda_k|^2 - \lambda_k\, \overline{c_{u_k}} - \overline{\lambda_k}\, c_{u_k} + |c_{u_k}|^2 \right) - \sum_{k=1}^{n} |c_{u_k}|^2$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_{u_k}|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - c_{u_k}|^2.$$

Získaný výraz je požadovaná pravá strana formuly (100). Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 19

Získanú rovnosť v Leme 5 možno geometricky interpetovať nasledujúcim spôsobom. Medzi všetkými lineárnymi kombináciami daných vektorov $u_1, \ldots, u_n$ ortonormálenho systému S aproximuje vektor x v norme $\|\cdot\|$ najlepšie práve súčet $s_x(u_1, \ldots, u_n)$ v (99), t.j., práve tá lineárna kombinácia, ktorej koeficienty sú Fourierovými koeficientami vektora x vzhľadom na vektory $u_1, \ldots, u_n$. Toto pozorovanie má svoje uplatnenie v numerickej analýze, kde je základom tzv. metódy najmenších štvorcov.

Dôsledok 4 (Besselova nerovnosť)

S označením a predpokladmi Lemy 5 platí pre každé $x \in X$ identita

$$\|x\|^2 = \sum_{u \in A} |c_u|^2 + \|x - s_x(A)\|^2 \quad \text{pre každú konečnú množinu } A \subseteq S. \tag{101}$$

Obzvlášť, platí Besselova nerovnosť

$$\sum_{u \in A} |c_u|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{pre každú konečnú množinu } A \subseteq S. \tag{102}$$

Dôkaz Dôsledku 4.

Formula (101) vyplýva priamo z rovnosti (100) pre voľbu koeficientov $\lambda_k := c_{u_k}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Keďže $\|x - s_x(A)\| \geq 0$ pre každú konečnú množinu $A \subseteq S$, z rovnosti (101) dostávame nerovnosť (102). Dôkaz je hotový. ■

Veta 19

Nech X je unitárny lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S \subseteq X$ je daný ortonormálny systém. Potom pre každý vektor $x \in X$ je nekonečný rad $\sum_{u \in S} |c_u|^2$, kde c_u, $u \in S$, sú Fourierove koeficienty v (98), konvergentný.

Dôkaz Vety 19.

Zvoľme vektor $x \in X$ a uvažujme súbor $\{c_u\}_{u \in S}$ jeho Fourierových koeficientov vzhľadom na ortonormálny systém S. Podľa Besselovej nerovnosti (102) platí

$$\sup \left\{ \sum_{u \in A} |c_u|^2,\ A \in \mathcal{S} \text{ je konečná množina} \right\} \overset{(102)}{\leq} \|x\|^2 < \infty. \tag{103}$$

V súlade s Vetou 6 je potom nekonečný rad $\sum_{u \in S} |c_u|^2$ konvergentný v $\mathbb{R}$. ∎

$$\text{Z (103) vyplýva odhad } \sum_{u \in S} |c_u|^2 \leq \|x\|^2 \text{ pre každé } x \in X. \tag{104}$$

Veta 20 (Parsevalova rovnosť)

Nech X je unitárny lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S \subseteq X$ je daný ortonormálny systém. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Pre vektor $x \in X$ Fourierov rad $\sum_{u \in S} c_u u$ konverguje k x v priestore X.*

(ii) *Pre vektor $x \in X$ platí Parsevalova rovnosť*

$$\sum_{u \in S} |c_u|^2 = \|x\|^2. \tag{105}$$

Dôkaz Vety 20.

Symbolom $\mathcal{S}$ označme systém všetkých konečných podmnožín množiny S. Zvoľme vektor $x \in X$. Predpokladajme, že Fourierov rad $\sum_{u\in S} c_u u$ je konvergentný v priestore X so súčtom x. Podľa Definície 9 platí relácia v (47), t.j., pre každé $\varepsilon > 0$ existuje množina $A_\varepsilon \in \mathcal{S}$ taká, že platí

$$\|x - s_x(A_\varepsilon)\| < \sqrt{\varepsilon} \tag{106}$$

kde vektor $s_x(A_\varepsilon)$ je definovaný v (99). V súlade s formulou (101) je nerovnosť (106) ekvivalentná s reláciou

$$\|x\|^2 - \varepsilon < \sum_{u\in A_\varepsilon} |c_u|^2. \tag{107}$$

Vzhľadom na nerovnosť (103) podmienka v (107) vyjadruje skutočnosť, že číslo $\|x\|^2$ je suprémum množiny $\{\sum_{u\in A} |c_u|^2,\ A \in \mathcal{S}\}$. Následne podľa Vety 6 dostávame, že súčet nekonečného radu $\sum_{u\in S} |c_u|^2$ je $\|x\|^2$, t.j., platí rovnosť (105). Naopak, nech platí Parsevalova rovnosť (105). Kombináciou Vety 6 a nerovnosti (103) je $\|x\|^2$ suprémum množiny $\{\sum_{u\in A} |c_u|^2,\ A \in \mathcal{S}\}$. Preto pre každé $\varepsilon > 0$ existuje množina $A_\varepsilon \in \mathcal{S}$ s vlastnosťou $\|x\|^2 - \varepsilon^2 < \sum_{u\in A_\varepsilon} |c_u|^2$. Keďže rad $\sum_{u\in S} |c_u|^2$ má nezáporné členy, platí

$$\|x\|^2 - \varepsilon^2 < \sum_{u\in A_\varepsilon} |c_u|^2 \le \sum_{u\in A} |c_u|^2 \quad \text{pre každé } A \in \mathcal{S} \text{ s } A_\varepsilon \subseteq A. \tag{108}$$

Dôkaz Vety 20 (pokračovanie).

Kombináciou (108) s identitou (101) dostávame

$$\|x - s_x(A)\| < \varepsilon \quad \text{pre každé } A \in \mathcal{S} \text{ s } A_\varepsilon \subseteq A. \tag{109}$$

kde $s_x(A)$ je definované v (99). V súlade s Definíciou 9 relácia v (109) znamená, že nekonečný rad $\sum_{u \in S} c_u u$ konverguje v priestore X k vektoru x. ■

Veta 21

Nech X je unitárny lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S \subseteq X$ je daný ortonormálny systém. Potom systém S je uzavretý práve vtedy, keď pre každý vektor $x \in X$ platí Parsevalova rovnosť (105) *vzhľadom na S.*

Dôkaz Vety 21.

Predpokladajme, že systém S je uzavretý vzhľadom na X a zvoľme vektor $x \in X$. V súlade s Definíciou 15(ii) potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, množina $A = \{u_1, \dots, u_{n_\varepsilon}\} \subseteq S$ a skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_\varepsilon} \in \mathbb{T}$ tak, že $\|x - s(A)\| < \sqrt{\varepsilon}$, kde vektor $s(A) := \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \lambda_k u_k$. Kombináciou s formulou (100) dostaneme

$$\|x\|^2 \overset{(100)}{=} \|x - s(A)\|^2 + \sum_{u \in A} |c_u|^2 - \sum_{k \in \{1,\dots,n_\varepsilon\}} |\lambda_k - c_{u_k}|^2 < \varepsilon + \sum_{u \in A} |c_u|^2. \tag{110}$$

Dôkaz Vety 21 (pokračovanie).

Vzhľadom na Besselovu nerovnosť (102) odvodená relácia v (110) vyjadruje skutočnosť, že číslo $\|x\|^2$ je suprémum množiny $\{\sum_{u \in A} |c_u|^2,\ A \in \mathcal{S}\}$. V kontexte dôkazu Vety 20 následne platí Parsevalova rovnosť (105). Naopak, nech pre každý vektor $x \in X$ je splnená Parsevalova rovnosť (105) vzhľadom na systém S. Potom podľa Vety 20(i) platí $\sum_{u \in S} c_u u = x$ pre každé $x \in X$. Nie je ťažké si premyslieť, že v kontexte Definície 9 to znamená, že $\overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} S} = X$. V zhode s Definíciou 15(ii) je teda systém S uzavretý. Dôkaz je hotový. ■

Veta 22 (Fourierove rady v Hilbertovom priestore)

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S \subseteq X$ je daný ortonormálny systém. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

- (i) *Systém S je ortonormálna báza priestoru X.*
- (ii) *Systém S je úplný.*
- (iii) *Systém S je uzavretý.*
- (iv) *Pre každý vektor $x \in X$ platí $\sum_{u \in S} c_u u = x$, kde c_u, $u \in S$, sú Fourierove koeficienty vzhľadom na systém S.*
- (v) *Pre každý vektor $x \in X$ platí Parsevalova rovnosť $\sum_{u \in S} |c_u|^2 = \|x\|^2$.*

Z vyššie získaných výsledkov vidíme, že v teórii Fourierových radov v unitárnych lineárnych priestoroch sú významné podmnožiny skalárov $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{T}$, kde I je nejaká indexová množina, pre ktoré je

$$\text{nekonečný rad } \sum_{\alpha \in I} |\lambda_\alpha|^2 \text{ konvergentný.} \tag{111}$$

Keďže členy nekonečného radu v (111) sú nezáporné reálne čísla, jeho konvergencia je úplne charakterizovaná vo Vete 6.

Lema 6

Nech I je daná indexová množina a $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{T}$ je daný systém skalárov. Ak nekonečný rad v (111) je konvergentný, potom množina všetkých indexov $\alpha \in I$, pre ktoré platí $\lambda_\alpha \neq 0$, je najviac spočítateľná.

Dôkaz Lemy 6.

Označme $s := \sum_{\alpha \in I} |\lambda_\alpha|^2$ a predpokladajme, že $s \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje iba konečne veľa indexov $\alpha \in I$ takých, že $|\lambda_\alpha| \geq \frac{1}{n}$, konkrétne najviac $n^2 s$. Zvoľme $n \in \mathbb{N}$ a sporom predpokladajme, že existujú skaláry $\lambda_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_m}$ pre nejaké $m > n^2 s$ s vlastnosťou $|\lambda_{\alpha_k}| \geq \frac{1}{n}$ pre každé $k \in \{1, \dots, m\}$. Z Vety 6 vieme, že $\sum_{k=1}^{m} |\lambda_{\alpha_k}| \leq s$. Na druhej strane máme

Dôkaz Lemy 6 (pokračovanie).

$$\sum_{k=1}^{m} |\lambda_{\alpha_k}| \geq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{m}{n^2} > s,$$

čo odporuje vyššie uvedenému odhadu. A nakoľko platí

$$\{\lambda_\alpha \neq 0,\ \alpha \in I\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ |\lambda_\alpha| \geq \frac{1}{n},\ \alpha \in I \right\}, \tag{112}$$

nenulových prvkov v systéme $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I}$ môže byť najviac spočítateľne veľa. ∎

Pre danú indexovú množinu I uvažujme množinu všetkých systémov skalárov $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{T}$, ktoré spĺňajú pdomienku (111), t.j.,

$$V := \left\{ \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{T}, \quad \sum_{\alpha \in I} |\lambda_\alpha|^2 < \infty \right\}. \tag{113}$$

Ak na množine V v (113) zavedieme sčítanie a násobenie skalárom v tvare

$$\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I} + \{\mu_\alpha\}_{\alpha \in I} := \{\lambda_\alpha + \mu_\alpha\}_{\alpha \in I}, \quad \nu\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I} := \{\nu\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I} \tag{114}$$

pre každé $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in I} \in V$ a každé $\nu \in \mathbb{T}$, potom pomocou Vety 6 a

Minkowského nerovnosti (Dodatky, Veta 3 pre $p = 2$) nie je ťažké ukázať, že V je lineárny priestor nad $\mathbb{T}$. Naviac, z Hölderovej nerovnosti (Dodatky, Veta 2 pre $p = 2 = q$) vyplýva, že zobrazenie

$$\left\langle \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{\mu_\alpha\}_{\alpha\in I} \right\rangle := \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha \overline{\mu_\alpha}, \quad \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{\mu_\alpha\}_{\alpha\in I} \in V, \tag{115}$$

je skalárny súčin na priestore V. Takto definovaný unitáry lineárny priestor budeme označovať $l^2(I)$. Dá sa dokonca ukázať, že sa jedná o Hilbertov priestor.

Poznámka 20

Pre každú konečnú indexovú množinu I s mohutnosťou $n \in \mathbb{N}$ je priestor $l^2(I)$ zrejme totožný s euklidovským priestorom $\mathbb{T}^n$. V prípade $I = \mathbb{N}$ je $l^2(\mathbb{N}) = l^2$, kde l^2 je unitárny priestor predstavený v Príklade 12. V oboch prípadoch sa jedná sa o separabilný Hilbertov priestor s ortonormálnou bázou

$$e_m := \{\delta_{mk}\}_{k=1}^{N}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{116}$$

kde δ_{nk} je štandardný Kroneckerov symbol a hodnota $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. V prípade $I = \mathbb{T}$ dostávame neseparabilný Hilbertov priestor $l^2(\mathbb{T})$ s ortonormálnou bázou

$$e_t := \{\delta_{ts}\}_{s\in\mathbb{T}}, \quad t \in \mathbb{T}. \tag{117}$$

Systémy e_t, $t \in \mathbb{T}$, v (117) je zrejme možné identifikovať ako súbor charakteristických funkcií všetkých jednobodových množín v telese $\mathbb{T}$.

Nech X je unitárny lineárny priestor nad telesom $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $S \subseteq X$ je daný ortonormálny systém. V súlade s Vetou 19 a nerovnosťou (104) sme odvodili, že pre každý vektor $x \in X$ je systém Fourierových koeficientov $\{c_u\}_{u\in S}$ v (98) prvkom priestoru $l^2(S)$. Môžeme preto uvažovať zobrazenie $\Phi : X \to l^2(S)$ definované predpisom

$$\Phi(x) := \{c_u\}_{u\in S} \overset{(98)}{=} \{\langle x,\, u\rangle\}_{u\in S}, \quad x \in X. \tag{118}$$

Nasledujúce výsledok predstavuje doplnenie Vety 22 ďalšou vlastnosťou, ktorá je ekvivalentná s tvrdeniami (i)–(v).

Veta 23 (Fourierove rady v Hilbertovom priestore)

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $S \subseteq X$ je daný ortonormálny systém. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Pre každý vektor $x \in X$ platí $\sum_{u\in S} c_u u = x$, kde c_u, $u \in S$, sú Fourierove koeficienty vzhľadom na systém S.*

(ii) *Pre každú dvojicu vektorov $x, y \in X$ platí rovnosť*

$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{u\in S} c_u\, \overline{d_u}, \tag{119}$$

kde c_u a d_u, $u \in S$, sú Fourierove koeficienty x a y vzhľadom na S.

Dôkaz Vety 23.

Predpokladajme platnosť (i) a nech uvažujme dvojicu vektorov $x, y \in X$. Využitím Cauchyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti (77) v Poznámke 12 a definičnej formuly (98) pre Fourierove koeficienty postupne máme

$$\left|\langle x,\, y\rangle - \sum_{u\in C} c_u\,\overline{d_u}\right| = \left|\left\langle x - \sum_{u\in C} c_u u,\; y - \sum_{u\in C} d_u u\right\rangle\right| \overset{(99)}{=} |\langle x - s_x(C),\, y - s_y(C)\rangle|$$

$$\overset{(77)}{\leq} \|x - s_x(C)\|\;\|y - s_y(C)\| \quad \text{pre každé } C \subseteq \mathcal{S}, \tag{120}$$

kde $\{c_u\}_{u\in S}$ a $\{d_u\}_{u\in S}$ sú systémy Fourierových koeficientov vektorov x a y vzhľadom na systém S. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Keďže platí $\sum_{u\in S} c_u u = x$ a $\sum_{u\in S} d_u u = y$, podľa (47) v Definícii 9 existujú množiny $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{S}$ také, že

$$\|x - s_x(A)\| < \sqrt{\varepsilon}, \quad \|x - s_y(B)\| < \sqrt{\varepsilon} \tag{121}$$

pre každé množiny $A, B \in \mathcal{S}$ spĺňajúce $A_\varepsilon \subseteq A$ a $B_\varepsilon \subseteq B$. Uvažujme množinu $C_\varepsilon := A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \in \mathcal{S}$. Kombináciou (120) a (121) dostávame

$$\left|\langle x,\, y\rangle - \sum_{u\in C} c_u\,\overline{d_u}\right| \overset{(120),(121)}{<} \varepsilon \quad \text{pre každé } C \in \mathcal{S} \text{ s } C_\varepsilon \subseteq C.$$

V súlade s reláciou (47) v Definícii 9 preto platí formula (119). Naopak, z pod-

Dôkaz Vety 23 (pokračovanie).

mienky (ii) vyplýva tvrdenie (i), nakoľko voľbou $x = y$ v (119) máme

$$\|x\|^2 \stackrel{(73)}{=} \langle x,\, x\rangle \stackrel{(119)}{=} \sum_{u\in S} c_u\,\overline{c_u} = \sum_{u\in S} |c_u|^2 \quad \text{pre každé } x \in X.$$

Pre každý vektor $x \in X$ teda platí Parsevalova rovnosť (105). Následne, podľa Vety 20(i) dostávame rovnosť $\sum_{u\in S} c_u u = x$ pre každé $x \in X$. ■

Dôsledok 5

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $S \subseteq X$ je daná ortonormálna báza. Potom zobrazenie $\Phi : X \to l^2(S)$ definované v (118) je lineárne a izometrické, t.j., platí

$$\langle \Phi(x),\, \Phi(y)\rangle_{l^2(S)} = \langle x,\, y\rangle_X \quad \text{pre každé dva vektory } x, y \in X. \tag{122}$$

Dôkaz Dôsledku 5.

Linearita zobrazenia Φ v (118) je dôsledkom axiómy P3 v Definícii 10, t.j., linearity skalárneho súčinu v prvej zložke, a definície operácií sčítania a násobenia skalárom v priestore $l^2(S)$ v (114). Keďže systém S je ortonormálna báza v X, kombináciou Vety 22(iv) a Vety 23(ii) dostávame platnosť formuly (119) v pries-

Dôkaz Dôsledku 5 (pokračovanie).

tore X. Vzhľadom na definíciu zobrazenia Φ v (118) a skalárneho súčinu v priestore $l^2(S)$ v (115) je však rovnosť ekvivalentná s identitou (122). ∎

Poznámka 21

Dodajme, že v súlade s Poznámkou 13 je zobrazenie Φ v (118) izometrickým zobrazením i medzi normovanými priestormi $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(l^2(S), \|\cdot\|_{l^2(S)})$, t.j., pre každý vektor $x \in X$ platí rovnosť

$$\|\Phi(x)\|_{l^2(S)} = \|x\|_X . \tag{123}$$

Obzvlášť, v súlade s axiómou N1 v Definícii 1 a linearitou Φ to znamená, že zobrazenie Φ je prosté.

Fundamentálne výsledky vo Vetách 22 a 23 završíme významným tvrdením pojednávajúcim o ďalších vlastnostiach zobrazenia Φ v (118). V literatúre sa tento výsledok štandarne označuje ako Rieszova–Fischerova veta. Ako ukážeme ďalej, poskytuje efektívny spôsob ako klasifikovať všetky Hilbertove priestory nad daným telesom $\mathbb{T}$. V nasledujúcom tvrdení analyzujeme konvergenciu nekonečného radu tvaru $\sum_{u \in S} \lambda_u u$ pre daný ortonormálny systém S, kde $\{\lambda_u\}_{u \in S} \subseteq \mathbb{T}$.

Veta 24

Nech X je unitárny priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S \subseteq X$ je ortonormálny systém. Nech $\{\lambda_u\}_{u \in S} \subseteq \mathbb{T}$ je systém skalárov s vlastnosťou, že nekonečný rad $\sum_{u \in S} \lambda_u u$ je konvergentný v priestore X so súčtom x. Potom

$$\lambda_u = \langle x, u \rangle \quad \textit{pre každé } u \in S. \tag{124}$$

Inými slovami, $\{\lambda_u\}_{u \in S}$ je súbor Fourierových koeficientov vektora x vzhľadom na ortonormálny systém S.

Dôkaz Vety 24.

Zvoľme pevne vektor $v \in S$. Pre každú množinu $A \in \mathcal{S}$ postupne platí

$$\left| \langle x, v \rangle - \sum_{u \in A} \lambda_u \langle u, v \rangle \right| = \left| \left\langle x - \sum_{u \in A} \lambda_u u, v \right\rangle \right| \overset{(77)}{\leq} \|x - s(A)\| \, \|v\| = \|x - s(A)\|, \tag{125}$$

kde $s(A) := \sum_{u \in A} \lambda_u u$. V súlade s predpokladmi pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $A_\varepsilon \in \mathcal{S}$ taká, že $\|x - s(A)\| < \varepsilon$ pre každé $A \in \mathcal{S}$ s $A_\varepsilon \subseteq A$. V kombinácii s (125) následne dostávame, že platí $\sum_{u \in S} \lambda_u \langle u, v \rangle = \langle x, v \rangle$. Vzhľadom na ortonormalitu systému S sa posledná rovnosť redukuje na tvar $\lambda_v = \langle x, v \rangle$. Vektor $v \in S$ bol zvolený ľubovoľne, a tak pre každé $u \in X$ platí (124). ■

Veta 25 (Rieszova–Fischerova)

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $S \subseteq X$ je daný ortonormálny systém. Potom pre každý súbor $\{\lambda_u\}_{u\in S} \in l^2(S)$ existuje vektor $x \in X$ s vlastnosťou, že

$$\text{platí rovnosť (124) pre každé } u \in S \text{ a } \sum_{u\in S} |\lambda_u|^2 = \|x\|^2. \tag{126}$$

Dôkaz Vety 25.

Zvoľme systém skalárov $\{\lambda_u\}_{u\in S} \in l^2(S)$. V súlade s definíciou priestoru $l^2(S)$ platí podmienka (111), t.j., máme

$$\sum_{u\in S} |\lambda_u|^2 < \infty. \tag{127}$$

Podľa Lemy 6 existuje najviac spočítateľne veľa vektorov $u \in S$, takých, že skalár $\lambda_u \neq 0$. Označme preto symbolom $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ množinu všetkých takýchto vektorov. Nakoľko konvergencia v (127) je "absolútna", platí rovnosť

$$\sum_{u\in S} |\lambda_u|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{u_k}|^2 . \tag{128}$$

Dokážeme, že rad $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{u_k} u_k$ je konvergentný v X v zmysle Definície 7. Vďa-

Dôkaz Vety 25 (pokračovanie).

ka úplnosti priestoru X stačí ukázať, že postupnosť čiastočných súčtov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda_{u_k} u_k$, $n \in \mathbb{N}$, je cauchyovská v norme $\|\cdot\|$ priestoru X definovanej v (73). Pre každé dva indexy $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, postupne máme

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_{u_k} u_k - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{u_k} u_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_{u_k} u_k \right\|^2$$

$$\overset{(73)}{=} \left\langle \left(\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_{u_k} u_k \right), \left(\sum_{l=m+1}^{n} \lambda_{u_l} u_l \right) \right\rangle$$

$$= \sum_{k,l=m+1}^{n} \lambda_{u_k} \overline{\lambda_{u_l}} \underbrace{\langle u_k, u_l \rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_{u_k}|^2 . \tag{129}$$

V zhode s predpokladmi nekonečný číselný rad $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{u_k}|^2$ konverguje, a preto podľa Cauchyho–Bolzanovho kritéria platí

pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že pre každé $n > m \geq n_\varepsilon$ je $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_{u_k}|^2 < \varepsilon^2$.

So zreteľom na identitu (129) je tento výrok ekvivalentný s reláciou

Dôkaz Vety 25 (pokračovanie).

pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že pre každé $n > m \geq n_\varepsilon$ platí $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Následne je postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergentná v priestore X. V súlade s Definíciou 7 preto existuje vektor $x \in X$ taký, že $\sum_{k=1}^\infty \lambda_{u_k} u_k = x$. Aplikáciou Vety 24 vzhľadom na ortonormálny systém $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ získame rovnosť $\lambda_{u_n} = \langle x,\, u_n\rangle$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. V prípade vektorov z množiny $S \setminus \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ využijeme spojitosť skalárneho súčinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$, pričom dostávame

$$\langle x,\, u\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{u_k} u_k,\, u \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_{u_k} u_k,\, u \right\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{u_k} \langle u_k,\, u\rangle = 0 = \lambda_u \quad \text{pre každé } u \in S \setminus \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Rovnosť (124) teda platí pre každý vektor $u \in S$. Napokon druhá rovnosť v (126) vyplýva z Vety 20(ii) vzhľadom na ortonormálny systém $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a formuly (128). Konkrétne, máme

$$\sum_{u\in S} |\lambda_u|^2 \overset{(128)}{=} \sum_{k=1}^\infty |\lambda_{u_k}|^2 \overset{(105)}{=} \|x\|^2.$$

Ukázali sme platnosť celého tvrdenia v (126), čo kompletizuje dôkaz. ∎

Dôsledok 6

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $S \subseteq X$ je daný ortonormálny systém. Pre daný systém skalárov $\{\lambda_u\}_{u\in S} \subseteq \mathbb{T}$ nekonečný rad $\sum_{u\in S} \lambda_u u$ konverguje v priestore X práve vtedy, keď λ_u, $u \in S$, sú Fourierove koeficienty nejakého vektora $x \in X$ vzhľadom na systém S.

Dôkaz Dôsledku 6.

Smer "$\Rightarrow$" je obsahom Vety 24. Platnosť implikácie "$\Leftarrow$" je dôsledkom Vety 25. Konkrétne, ak λ_u, $u \in \mathbb{N}$, sú Fourierove koeficienty vektora $x \in X$, potom podľa Vety 19 je nekonečný rad $\sum_{u\in S} |\lambda_u|^2$ konvergentný, a teda systém skalárov $\{\lambda_u\}_{u\in S} \in l^2(S)$. To následne podľa Vety 25 implikuje podľa (126) rovnosť $\sum_{u\in S} |\lambda_u|^2 = \|y\|^2$ pre vhodný vektor $y \in X$. Napokon v súlade s Vetou 20(i) dostávame rovnosť $\sum_{u\in S} \lambda_u u = y$. Dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 22

Je nutné zdôrazniť, že v prípade všeobecného ortonormálneho systému S nie je vektor $x \in X$ v Dôsledku 6 pre daný súbor $\{\lambda_u\}_{u\in S} \subseteq \mathbb{T}$ určený jednoznačne. Na druhej strane, v súlade s Vetou 24 práve jeden z takýchto vektorov je súčtom nekonečného radu $\sum_{u\in S} \lambda_u u$ v priestore X, konkrétne vektor y v dôkaze vyššie.

Nasledujúci tvrdenie kompletizuje vlastnosti zobrazenia Φ definovaného v (118), ktoré sme uviedli v Dôsledku 5.

Veta 26

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $S \subseteq X$ je daná ortonormálna báza. Potom zobrazenie $\Phi : X \to l^2(S)$ v (118) *je izometrický izomorfizmus unitárnych priestorov $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ a $(l^2(S), \langle\cdot,\cdot\rangle_{l^2(S)})$.*

Dôkaz Vety 26.

Kľúčovým predpokladom je práve skutočnosť, že ortonormálny systém $S \subseteq X$ je ortonormálna báza priestoru X. Zvoľme systém skalárov $\{\lambda_u\}_{u\in S} \subseteq l^2(S)$. Podľa Vety 25 vieme, že existuje $x \in X$, že skaláry λ_u, $u \in S$, sú Fourierove koeficienty vektora x vzhľadom na systém S a platí $\sum_{u\in S} |\lambda_u|^2 = \|x\|^2$. V súlade s Vetou 20(ii) sa teda jedná o Parsevalovu rovnosť v (105), pričom zároveň podľa Vety 20(i) máme $\sum_{u\in S} \lambda_u u = x$. Z ekvivalencií vo Vete 22 následne vyplýva, že x je jediný vektor, ktorého Fourierove koeficienty sú práve skaláry λ_u, $u \in S$. Preto v súlade s (118) dostávame rovnosť $\Phi(x) = \{\lambda_u\}_{u\in S}$. To znamená, že zobrazenie Φ je surjektívne. Na druhej strane v zhode s Dôsledkom 5 je Φ zároveň i lineárne izometrické zobrazenie. Preto Φ je izometrický izomorfizmus priestorov $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ a $(l^2(S), \langle\cdot,\cdot\rangle_{l^2(S)})$. Dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 23

Je vhodné presne vymedziť význam jednotlivých predpokladov vo Vete 26 a ich následné použitie v samotnom dôkaze. Rieszova–Fischerova Veta 25 zaručuje, že pre každý ortonormálny systém S v Hilbertovom priestore X je zobrazenie Φ definované v (118) surjektívne, t.j., platí $\Phi(X) = l^2(S)$. Zobrazenie Φ je zrejme vždy lineárne a podľa Vety 20 zachováva normu každého vektora $x \in X$, ktorý je súčtom svojho Fourierovho radu $\sum_{u \in S} c_u u$, kde $\{c_u\}_{u \in S} = \Phi(x)$ v súlade s (118). V kontexte Poznámky 22 však vektor $x \in X$ nemusí byť nutne súčtom radu $\sum_{u \in S} c_u u$. Táto požiadavka je podľa Vety 22 splnená pre každé $x \in X$ práve vtedy, keď systém S je ortonormálna báza priestoru X. V prípade Hilbertovho priestoru X podľa Vety 23 teda dostávame

S je ortonormálna báza $\Leftrightarrow$ Φ zachováva skalárny súčin $\Leftrightarrow$ Φ je injektívne zobrazenie.

V tomto duchu potom môžeme hlbšie interpretovať výsledok Vety 21. Ak $S \subseteq X$ je daná ortonormálna báza Hilbertovho priestoru X, potom každý vektor $x \in X$ je možné jednoznačne vyjadriť v tvare

$$x = \sum_{u \in S} c_u u, \quad \text{kde } c_u = \langle x, u \rangle \text{ pre každé } u \in S. \tag{130}$$

Systém $\{c_u\}_{u \in S} \subseteq \mathbb{T}$ je prvkom Hilbertovho priestoru $l^2(S)$ a platí rovnosť

$$\sum_{u \in S} |c_u|^2 = \|x\|^2.$$

Obsah

V poslednej sekcii tejto prednášky klasifikujeme všetky Hilbertove priestory. Ako uvidíme, kľúčovým parametrom pri tejto analýze bude mohutnosť ortonormálnej bázy skúmaného Hilbertovho priestoru.

Veta 27

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $S, T \subseteq X$ sú dve ortonormálne bázy. Potom platí $\operatorname{card} S = \operatorname{card} T$.

Dôkaz Vety 27.

V prípade, že dimenzia priestoru X je konečná, tvrdenie vyplýva z komentára v Príklade 16. Predpokladajme, že $\dim X = \infty$. Zvoľme vektor $x \in T$ a nech $\{c_u(x)\}_{u\in S}$ je systém jeho Fourierových koeficientov vzhľadom na ortonormálnu bázu S definovaných v (98). Podľa (104) platí nerovnosť $\sum_{u\in S} |c_u(x)|^2 \leq \|x\|^2$. V súlade s Lemou 6 je preto množina $\{c_u(x) \neq 0,\ u \in S\}$ najviac spočítateľná a neprázdna, keďže $x \neq 0$. To následne znamená, že

$$\text{množina } A_T := \bigcup_{v\in T} \{c_u(v) \neq 0,\ u \in S\} \text{ má rovnakú mohutnosť ako } T. \qquad (131)$$

Keďže T je ortonormálna báza priestoru X, v súlade s Lemou 3 je systém T úplný, t.j., podľa Definície 15(i) pre každý vektor $u \in S$ existuje vektor $v \in T$ taký, že $c_u(v) = \langle v, u\rangle \neq 0$. V súlade s (131) teda platí $S = A_T$, a tak $\operatorname{card} S = \operatorname{card} A_T = \operatorname{card} T$. Dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 24 (Hilbertova dimenzia)

Kardinalita ortonormálnej bázy daného Hilbertovho priestoru X nad $\mathbb{T}$ sa nazýva Hilbertova dimenzia priestoru X a budeme ju označovať $\dim_H X$. Na základe výsledku vo Vete 27 je tento pojem definovaný korektne. Z Príkladu 16 vyplýva, že v prípade konečno rozmerného Hilbertovho priestoru s dimenziou $n \in \mathbb{N}$ platí $\dim_H X = \dim X = n$. V Hilbertových priestoroch X nekonečnej dimenzie v súlade s Vetou 16 kardinálne čísla $\dim_H X$ a $\dim X$ spĺňajú $\dim_H X \leq \dim X$.

Príklad 20 (Hilbertove priestory nekonečnej dimenzie)

V Príklade 17 sme uviedli, že v každom nekonečno rozmernom Hilbertovom priestore X žiadna ortonormálna báza nemôže byť jeho Hamelovou bázou. Táto skutočnosť je dôsledkom Vety 25 a jednoznačnosti reprezentácie v (130). Ak S je daná ortonormálna báza v priestore X, potom existuje aspoň jeden vektor $x \in X$, ktorý má nenulové všetky Fourierove koeficienty vzhľadom na systém S. To následne znamená, že vektor x sa nedá vyjadriť ako lineárna kombinácia nejakej konečnej množiny vektorov z S, t.j., systém S nie je Hamelovou bázou lineárneho priestoru X.

Pomocou získaných výsledkov prezentujeme klasifikáciu Hilbertových priestorov.

Veta 28

Pre každú danú neprázdnu indexovú množinu I existuje Hilbertov priestor X nad $\mathbb{T}$ s $\dim_H X = \operatorname{card} I$. Každý takýto Hilbertov priestor X je izometricky izomorfný s Hilbertovým priestorom $l^2(I)$.

Dôkaz Vety 28.

Ukážeme, že má Hilbertova dimenzia priestoru $l^2(I)$ je rovná mohutnosti množiny I. Skutočne, systém vektorov e_u, $u \in I$, tvaru

$$e_u = \{\lambda_v^u\}_{v \in I} \subseteq \mathbb{T}, \quad \lambda_v^u := \begin{cases} 1, & v = u, \\ 0, & v \neq u, \end{cases} \qquad u \in I, \tag{132}$$

je ortonormálna báza priestoru $l^2(I)$ a $\operatorname{card}\{e_u,\, u \in I\} = \operatorname{card} I$. Jednoznačnosť Hilbertovho priestoru X s vlastnosťou $\dim_H X = \operatorname{card} I$ je priamym dôsledkom Vety 26, kde požadovaný izometrický izomorfizmus je realizovaný prostredníctvom zobrazenia Φ definovaného v (118). Dôkaz je hotový. ∎

Dôsledok 7

Dva Hilbertove priestory nad daným telesom $\mathbb{T}$ sú izometricky izomorfné práve vtedy, keď majú rovnakú Hilbertovu dimenziu.

Poznámka 25 (Separabilné Hilbertove priestory)

Medzi Hilbertovými priestormi nad $\mathbb{T}$ majú z hľadiska aplikácií významné postavenie separabilné Hilbertove priestory. Pomocou Poznámky 18 a Vety 28 je možné ľahko ukázať, že Hilbertov priestor X je separabilný práve vtedy, keď má najviac spočítateľnú ortonormálnu bázu, t.j., jeho Hilbertova dimenzia $\dim_H X$ v Poznámke 24 je buď konečná alebo je rovná kardinálnemu číslu $\aleph_0$. V kontexte Vety 28 je každý Hilbertov priestor s algebraickou dimenziou $n \in \mathbb{N}$ izometricky izomorfný s priestorom $l^2(I)$, kde I je akákoľvek n-prvková množina. Obzvlášť sa teda jedná o euklidovský priestor $\mathbb{E}^n$ nad daným telesom $\mathbb{T}$ prezentovaný v Príklade 11. Každý nekonečno rozmerný separabilný Hilbertov priestor je izometrický izomorfný s priestorom $l^2(\mathbb{N}) = l^2$ v Príklade 12. Ďalšími jeho realizáciami sú funkcionálny priestor $L^2[a,b]$, taktiež z Príkladu 12, alebo Sobolevov priestor $W^{1,2}[a,b]$ spomenutý v Príklade 15, kde $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktný interval.

Poznámka 26

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ a $A \subseteq X$ je nejaký daný normovaný lineárny podpriestor. Z Vety 13 a Poznámky 23 vyplýva, že ak S_A je ortonormálna báza podpriestoru A a $S_{A^\perp}$ je ortonormálna báza podpriestoru $A^\perp$, potom systém $S_A \cup S_{A^\perp}$ predstavuje ortonormálnu bázu celého priestoru X.