Cvičení 10

Pravděpodobnostní vytvořující funkce

Definice: Nechť X je celočíselná nezáporná náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $P(X=k)=\begin{cases} p_k \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$. Pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny X je dána vztahem: $g_X(z)=E(z^X)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, kde $|z|\le 1$.

Vlastnosti:

a) $p_k = \left.\frac{g_X^{(k)}(z)}{k!}\right|_{z=0}$ pro k = 0, 1, 2, …

b) $E(X)=\frac{d}{dz} g_X(z)\Big|_{z=1}$, $D(X)=\left.\frac{d^2}{dz^2} g_X(z)\right|_{z=1} + E(X)-[E(X)]^2$.

c) X_1, ..., X_n jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\Rightarrow\ g_Y(z)=g_{X_1}(z)\cdot\ldots\cdot g_{X_n}(z)$.

d) X_1, ..., X_n jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají všechny stejnou pravděpodobnostní funkci $P(X_i=k)=\begin{cases} p_k \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, i = 1, 2, ..., n.

Pak transformovaná náhodná veličina $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ má pravděpodobnostní funkci

$P(Y=k)=\begin{cases} \{p_k\}^{n*} \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$.

e) Nechť X_1, X_2, ... je posloupnost stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin, které mají všechny stejnou pravděpodobnostní funkci $P(X_i=k)=\begin{cases} p_k \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, i = 1, 2, ... Nechť N je celočíselná nezáporná náhodná veličina nezávislá na X_1, X_2, ... s pravděpodobnostní funkcí $P(N=n)=\begin{cases} q_n \text{ pro } n=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$.

Pak náhodná veličina $S = X_1 + ... + X_N$ (tj. součet náhodného počtu náhodných veličin) má pravděpodobnostní funkci $P(S=k)=h_k=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} q_n \{p_k\}^{n*} \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$.

f) Pro pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny $S = X_1 + ... + X_N$ platí: $g_S(z) = g_N(g_X(z))$.

g) $E(S) = E(N)\mu$, $D(S) = D(N)\mu^2 + E(N)\sigma^2$, kde $\mu = E(X_i)$, $\sigma^2 = D(X_i)$, i = 1, 2, …

Příklad 1.: Celočíselná nezáporná náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci $P(X=k)=\begin{cases}\frac{1}{k(k+1)} \text{ pro } k=1,2,\dots \\ 0 \text{ jinak}\end{cases}$. Najděte její pravděpodobnostní vytvořující funkci.

Návod: Použijte rozklad na parciální zlomky a Taylorův rozvoj funkce $\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$.

Výsledek: $g_X(z)=1+\frac{1-z}{z}\ln(1-z)$

Příklad 2.: Pomocí pravděpodobnostních vytvořujících funkcí najděte střední hodnoty a rozptyly těchto rozložení: a) $Dg(\mu)$, b) $A(\vartheta)$, c) $Bi(n,\vartheta)$, d) $Ge(\vartheta)$.

Výsledek: ad a) E(X) = μ, D(X) = 0, ad b) $E(X)=\vartheta, D(X)=\vartheta(1-\vartheta)$, ad c) $E(X)=n\vartheta, D(X)=n\vartheta(1-\vartheta)$, ad d) $E(X)=\frac{1-\vartheta}{\vartheta}, D(X)=\frac{1-\vartheta}{\vartheta^2}$

Píklad 3.: Pravděpodobnostní vytvořující funkce celočíselné nezáporné náhodné veličiny X má tvar: $g_X(z)=\frac{z}{5}(2+3z^2)$. Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

Výsledek: $P(X=k)=\frac{2}{5}\text{pro} k=1, \frac{3}{5}\text{pro} k=3$

Příklad 4.: Provedeme tři nezávislé pokusy, v nichž sledujeme nastoupení úspěchu. V prvním pokusu nastává úspěch s pravděpodobností 0,5, ve druhém 0,2 a ve třetím 0,1. Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny Y, která udává počet úspěchů v těchto třech pokusech.

a) Vyjádřete pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny Y.

b) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Y.

c) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce odvoďte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Y.

Výsledek:

Ad a) $g_Y(z)=0{,}36+0{,}49z+0{,}14z^2+0{,}01z^3$

Ad b) $E(Y)=0{,}8, D(Y)=0{,}5$

Ad c) p_0 = 0,36, p_1 = 0,49, p_2 = 0,14, p_3 = 0,01

Příklad 5: Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim Po(\lambda_i)$, i = 1, …, n. Pomocí pravděpodobnostních funkcí odvoďte rozložení transformované náhodné veličiny $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$.**Výsledek:** $Y \sim Po\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$

Příklad 6: Předpokládejme, že počet vajíček, která snese slepice za sezónu, je náhodná veličina N ~ Po(λ). Pravděpodobnost, že se z libovolného vajíčka vylíhne kuře, je ϑ. Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce odvoďte rozložení náhodné veličiny S, která udává počet kuřat vylíhlých za sezónu z vajíček dané slepice. Pomocí vzorce z bodu (g) vypočtěte též E(S) a D(S).

Výsledek: S ~ Po($\lambda\vartheta$), E(S) = D(S) = $\lambda\vartheta$