Cvičení 11.

Galtonův – Watsonův proces větvení

Definice: Nechť jedinec tvořící nultou generaci může dát vznik 0, 1, 2, ... jedincům (potomkům) první generace. Analogicky každý jedinec z první generace může dát vznik 0, 1, 2, ... jedincům druhé generace atd. Přitom předpokládáme, že
a) počet potomků X náhodně zvoleného jedince má pravděpodobnostní funkci
$P(X=k)=\begin{cases} p_k \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, která nezávisí na zvoleném jedinci ani na generaci, do níž přísluší;
b) jedinci z dané generace dávají vzniknout svým potomkům vzájemně nezávisle.
Označme X_n počet jedinců n-té generace (speciálně je $X_0 = 1$). Za uvedených předpokladů posloupnost náhodných veličin $\{X_n; n \in N_0\}$ tvoří homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0, 1, 2, ...}. Tento řetězec se nazývá Galtonův – Watsonův proces větvení.

Vlastnosti:

1. Matice přechodu má tvar $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0^{\,2} & 2p_0p_1 & p_1^{\,2}+2p_0p_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$, tj. $\forall i, j \in J: p_{ij} = \{p_j\}^{i*}$.

2. Pro pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny X_{n+1} platí:
$g_{X_{n+1}}(z)=\begin{cases} g_{X_n}(g_X(z)) \text{ pro } n=1,2,\ldots \\ 0 \text{ pro } n=0 \end{cases}$, kde $g_X(z)$ je pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny X_1.

3. Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X_n platí:
$E(X_n)=\mu^n,\ D(X_n)=\begin{cases} \dfrac{\sigma^2\mu^{n-1}(\mu^n-1)}{\mu-1} \text{ pro } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 \text{ pro } \mu=1 \end{cases}$, kde $\mu=E(X_1), \sigma^2=D(X_1)$

4. Pro pravděpodobnost vyhynutí v n-té generaci platí: $P(X_n=0)=q_n=g_{X_n}(0)$

5. Pro limitní pravděpodobnost vyhynutí platí:
a) Je-li $\mu \le 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$.
b) Je-li $\mu > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \xi$, kde $\xi \in (0,1)$ je nejmenší kladný kořen rovnice $z = g_X(z)$.

Příklad: Uvažme G – W proces, v němž $p_0 = \frac{1}{5}, p_1 = \frac{1}{5}, p_2 = \frac{3}{5}, p_k = 0$, k = 3,4,…

a) Vypočtěte prvky matice přechodu **P** pro i = 0, 1, 2 a j = 0, 1, 2, 3, 4.
b) Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci počtu jedinců ve 2. generaci.
c) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce počtu jedinců ve 2. generaci vypočtěte pravděpodobnostní funkci.
d) Najděte střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců ve 2. generaci.
e) Vypočtěte limitní pravděpodobnost vyhynutí.

Úloha do počítačové učebny: Nechť náhodná veličina, která udává počet synů náhodně vybraného muže, se řídí
a) binomickým rozložením Bi(2, 0,5),
b) rovnoměrným diskrétním rozložením na množině {0, 1, 2},
c) rozložením z předešlého příkladu, tj. p_0=1/5; p_1=1/5; p_2=3/5.
Napište v MATLABu script, který bude počítat pravděpodobnost zániku příjmení po n generacích (volte např. n = 20) a limitní hodnotu pravděpodobnosti zániku. Graficky znázorněte závislost pravděpodobnosti zániku na počtu generací.
Napište též skript, který vypočítá střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců v n-té generaci.