Cvičení 8.: SHO s omezenou kapacitou

1. Systém M/M/1/1

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je 1 (zákazník nemůže čekat ve frontě a je-li systém obsazený, odchází bez obsloužení).

Stacionární rozložení: $\mathbf{a} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)$.

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude odmítnut: $P_Z = a_1$.

Střední hodnota počtu: přijatých zákazníků za jednotku času $\lambda_P = \lambda a_0$, odmítnutých zákazníků za jednotku času $\lambda_Z = \lambda a_1$, využití systému: $\kappa = \rho a_0 = \frac{\lambda}{\mu} a_0$, $E(N) = a_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, $E(W) = \frac{1}{\lambda+\mu}$

Příklad 1.: Pracovnice v informačním středisku přijme v průměru jedno volání každých 12 minut. Hovor trvá v průměru 6 minut. Za předpokladu, že vstupní proud požadavků je Poissonův proces a doba trvání hovoru se řídí exponenciálním rozložením, najděte odpovědi na následující otázky:
a) Jaké % volání bude odbaveno?, b) Kolik hovorů se uskuteční za 1 h? c) Jaká je pr.. odmítnutí?
Výsledky: ad a) 66,7 %, ad b) 3,33, ad c) 33,3 %

2. Systém M/M/n/m/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je omezená (je rovna m) a frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}, \rho = \frac{\beta}{n}$. Systém se může stabilizovat vždy.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1,2,\ldots,n \\ \frac{n^n}{n!} \rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1,\ldots,m \end{cases}$, kde $a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^{m} \rho^j}$.

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Pravděpodobnost: odmítnutí $P_Z = \frac{n^n}{n!} \rho^m a_0$, čekání ve frontě $P_Q = \begin{cases} a_n \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} \text{ pro } \rho \neq 1 \\ a_n (m-n) \text{ pro } \rho = 1 \end{cases}$.

Střední hodnota počtu: přijatých zákazníků za jednotku času $\lambda_P = \lambda(1-P_Z)$, odmítnutých zákazníků za jednotku času: $\lambda_Z = \lambda P_Z$, $E(N_Q) = \sum_{j=n+1}^{m} (j-n) a_j$, $E(N_S) = \beta(1-P_Z)$.

Využití systému: $\kappa = \rho(1-P_Z)$.

Ostatní charakteristiky dostaneme pomocí Littleova vzorce.

Příklad 2.: V autoservisu jsou 3 mycí rampy a jeden pracovník, jemuž mytí auta trvá v průměru 12 min. Za 1 h přijedou průměrně 3 auta. Jsou-li však v okamžiku příjezdu auta všechny rampy obsazeny, auto nečeká a vrací se později.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v autoservisu budou 0, 1, 2, 3 auta?
b) Vypočtěte střední hodnotu počtu zákazníků v autoservisu a ve frontě.
c) Vypočtěte střední hodnotu doby čekání ve frontě.
d) Jaká je pravděpodobnost, že bude volná aspoň jedna rampa?
e) Vypočtěte využití systému.
Výsledky: ad a) 125/272, 75/272, 45/272, 27/272, ad b) 246/272, 99/272, ad c) 8 min 5 s, ad d) 0,9, ad e) 0,54
Návod na řešení pomocí MATLABu: Použijeme funkci odmitani.m
lambda=3;mi=5;n=1;m=3;
[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)

Příklad 3.: Do univerzitního bufetu s kapacitou osm stolků po čtyřech místech přichází v průměru 25 studentů za hodinu. V průměru se student zdrží 30 minut. Můžeme předpokládat, že vstupní proud studentů je Poissonův proces a doba pobytu má exponenciální rozložení.
a) Jaká je pravděpodobnost, že bufet bude prázdný?
b) Jaká je pravděpodobnost, že bufet bude plně obsazen?
c) Na kolik procent je bufet využíván?
d) Jaký je průměrný počet volných míst?
e) Jaký je průměrný počet studentů, kteří si nemají kam sednout za hodinu provozu bufetu?
Výsledky: ad a) $3{,}73\text{x}10^{-6}$, ad b) $1{,}79\text{x}10^{-6}$, ad c) 39,1 %, ad d) 19,5, ad c) $4{,}47\text{x}10^{-5}$

Návod na řešení pomocí MATLABu: Použijeme funkci odmitani.m
lambda=25;mi=2;n=32;m=32;
[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)

3. Uzavřený systém: V systému je m zákazníků, přičemž mohou čekat v omezené frontě délky m – n ≥ 0. Zákazníci po ukončení obsluhy opouštějí systém, ale později se do něj vracejí s novým požadavkem. Doba pobytu každého zákazníka mimo systém má rozložení $\mathrm{Ex}(\lambda)$, doba obsluhy každé linky se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$. Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}, \rho = \frac{\beta}{n}$.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \binom{m}{j}\beta^j a_0 \text{ pro } j = 1,2,\dots,n \\ \frac{n^n m!}{n!(m-j)!}\rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1, n+2,\dots,m \end{cases}$, kde $a_0 = 1 - \sum_{j=1}^{m} a_j$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě: $P_Q = P(N \geq n) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} a_j$

Charakteristiky stabilizovaného systému: $E(N) = \sum_{j=0}^{m} j a_j$, $E(N_S) = \sum_{j=0}^{n-1} j a_j + n\sum_{j=n}^{m} a_j$, střední hodnota počtu zákazníků: mimo systém $E(N_R) = m - E(N)$, přicházejících za jednotku času: $\lambda_R = \lambda E(N_R)$, využití systému: $\kappa = \rho E(N_R)$.Ostatní charakteristiky – viz Littleův vzorec.

Příklad 4.: Skupinu pěti stejných strojů má na starosti jeden údržbář. Doba bezporuchového provozu stroje má exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/2 směny a doba opravy má rovněž exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/20 směny.
a) Jaká je pravděpodobnost, že všechny stroje pracují?
b) Jaká je pravděpodobnost, že budou současně vyřazeny aspoň dva stroje?
Výsledky: ad a) 0,564, ad b) 0,154
Návod na řešení pomocí MATLABu: Použijeme funkci uzavreny.m
lambda=2;mi=20;n=1;m=5;
function[a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m)